**UNIVERSIDADE DE LISBOA**

**INSTITUTO DE EDUCAÇÃO**

# INVESTIGAÇÕES E TECNOLOGIAS NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA: UMA EXPERIÊNCIA NO 3.º CICLO

**Sandra Maria Abrantes Cardoso Leitão**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de Especialidade em Didática da Matemática

Trabalho Projeto

2018

**UNIVERSIDADE DE LISBOA**

**INSTITUTO DE EDUCAÇÃO**

# INVESTIGAÇÕES E TECNOLOGIAS NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA: UMA EXPERIÊNCIA NO 3.º CICLO

**Sandra Maria Abrantes Cardoso Leitão**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de Especialidade em Didática da Matemática

Trabalho Projeto orientado pelo

Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

2018

# Resumo

O objetivo deste trabalho foi investigar como se desenvolve a aprendizagem dos alunos de uma turma de 9.º ano em Trigonometria do Triângulo Retângulo, utilizando uma abordagem de ensino exploratório. Tive por base um conjunto de tarefas que envolviam tecnologias, problemas em contexto da vida real e investigações que pretendiam conduzir à generalização, enquanto processo-chave do raciocínio matemático. O estudo procurou saber de que modo os alunos trabalham com conceitos trigonométricos quando usam as TIC, que capacidade de generalização e justificação mostram, que estratégias usam e que dificuldades manifestam. O estudo usou uma metodologia qualitativa, seguindo o paradigma interpretativo, sendo baseado na recolha de dados descritivos, recolhidos na sala de aula, ambiente natural dos alunos. Os métodos e instrumentos usados foram a observação participante e a recolha documental, através das produções escritas dos alunos e gravações bem como de outros materiais, nomeadamente um diário de bordo, e, ainda, um teste realizado no final da unidade de ensino.

Os resultados evidenciam que o recurso às TIC facilitou o processo de ensino-aprendizagem da Trigonometria, contribuindo para a elaboração de situações de aprendizagem ricas em possibilidades de construção do conhecimento, nomeadamente a visualização e compreensão de conceitos trigonométricos. Além disso, funcionou como um fator de motivação para os alunos na identificação e compreensão das razões trigonométricas. Na resolução dos problemas e investigações propostos, os alunos recorreram a estratégias diversificadas, com predominância de procedimentos que envolviam conceitos trigonométricos, nos quais não manifestaram dificuldades. Os resultados mostram igualmente que os alunos apresentaram evidências de raciocínios relevantes, mostraram capacidade de justificar e generalizar em Trigonometria. O recurso à manipulação de expressões com variáveis permitiu aos alunos elaborarem conjeturas e outras generalizações nomeadamente a Fórmula Fundamental da Trigonometria e a justificação de que a tangente de um ângulo agudo é igual à razão entre os respetivos seno e cosseno.

**Palavras-chave:** Trigonometria, TIC, investigação, resolução de problemas, estratégia, dificuldades.

## Abstract

The goal of this work was to investigate how the students of a 9th grade class develop their learning skills in the Triangle Rectangle Trigonometry, using an exploratory teaching approach. It was based on a set of tasks involving technologies, problems in real life contexts and investigations that were intended to lead to generalizations, as a key process of mathematical reasoning. The study was aimed to find out how students work with trigonometric concepts when using ICT, what generalization and justification ability they have, what strategies they use and what difficulties they present. The study used a qualitative methodology, following the interpretative paradigm, being based on the collection of descriptive data, collected in the classroom, the natural environment of the students. The methods and instruments used were participant observation and document collection, through the written productions of the students, recordings as well as other materials, namely a logbook, and also a test carried out at the end of the teaching unit.

The results show that the use of ICT facilitated the teaching-learning process of Trigonometry, contributing to the elaboration of learning situations rich in possibilities of knowledge construction, namely the visualization and understanding of trigonometric concepts. In addition, it was a motivating factor for students in the identification and understanding of trigonometric ratios. When solving the problems and investigations proposed, the students used diversified strategies, with predominance of procedures that involved trigonometric concepts, in which they did not present difficulties. The results also show that the students presented evidence of relevant reasoning, showed capacity to justify and generalize in Trigonometry. The manipulation of expressions with variables allowed students to construct conjectures and other generalizations, namely the Fundamental Formula of Trigonometry and the justification that the tangent of an acute angle is equal to the ratio of its sine and cosine.

**Key words:** Trigonometry, ICT, research, problem solving, strategy, difficulties.

*Ao meu querido filho, para que se ilumine*
*e compreenda que as conquistas*
*são o resultado de muitas lutas travadas.*

## Agradecimentos

Ao Professor Doutor João Pedro da Ponte, com o meu profundo respeito e verdadeira admiração pelo talento e auxílio, reconhecidamente agradeço a honra que me deu aceitando a orientação do meu trabalho.

Aos meus alunos que participaram neste estudo, presto-lhes o meu apreço pela motivação que sempre demonstraram para aprender e para me ensinar.

À Sandra Carvalho, amiga, colega e companheira deste desafio agradeço as muitas palavras de incentivo e a disponibilidade para me acompanhar em longas e árduas horas de trabalho.

Às minhas amigas Celeste, Cláudia, Conceição, Sílvia e Teresa pelas vossas palavras de incentivo e por compreenderem as minhas ausências.

À Susana Stoffel por toda a amizade, carinho e paciência para me ajudar e ouvir sempre que eu precisava.

Aos meus pais e irmãs por terem sempre acreditado em mim.

Ao Quim, pois não existe amor nem gratidão que pague o que lhe devo.

# ÍNDICE GERAL

# ÍNDICE DE TABELAS

# ÍNDICE DE FIGURAS

# Capítulo 1

# INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta as motivações que levaram à realização deste estudo sobre a aprendizagem na Trigonometria do Triângulo Retângulo pelos alunos do 9.º ano, no quadro de uma experiência de ensino, bem como a sua relevância e a pertinência. Enuncio também, o objetivo e as questões de investigação que me proponho estudar.

## 1.1. Motivação e pertinência do estudo

Antes mesmo de aprender a ler e escrever, mostrei gosto pela Matemática. A beleza de abrir os olhos e ver Matemática no que me rodeia foi sempre uma constante na minha vida. O meu mundo foi sempre cercado por números, retas e equações.

A expressão "Querer Ensinar Matemática" nos três tempos verbais delineia quem sou.

O ato de ensinar não está limitado apenas à transmissão de informação. Como professora, procuro transmitir também a minha paixão pela Matemática mostrando aos meus alunos a sua importância na vida real e tento desencadear neles a curiosidade pelo saber proporcionando-lhes experiências com significado que contribuam para a sua aprendizagem.

Consciente de que o trabalho de professor não é estático e deve estar num ciclo constante de melhoria e de reflexão sobre as suas práticas, ao longo de duas décadas de trabalho, pesquisei bastante, frequentei inúmeras ações de formação contínua, o que motivou à inscrição no Mestrado de Didática da Matemática.

Procuro traduzir neste trabalho de mestrado uma abordagem que ajude a envolver ativamente os alunos no processo de construção da sua própria realidade matemática, no tópico da Trigonometria do Triângulo Retângulo e no gosto pela Matemática.

A Trigonometria há muito que me fascina dada a sua presença em, praticamente todos os ramos da Matemática, sendo também utilizada na Física, Astronomia e muitas outras áreas. Destaco este tópico pelo seu potencial para desenvolver o raciocínio matemático, habilidades e competências.

Ao longo dos anos, perguntas como "Onde vou aplicar estas fórmulas", são constantes no nosso dia-a-dia. Em variadíssimas situações esclarecemos as ideias matemáticas que vão sendo construídas pelos alunos, principalmente para dar resposta a este tipo de questões contribuindo deste modo para uma visão mais crítica sobre os objetos do conhecimento. Os alunos respondem às atividades matemáticas (exercícios em fichas e testes), porém, não se sabe se a aprendizagem está a resultar num conhecimento com real significado, ou se apenas houve uma memorização ocasional dos assuntos para o cumprimento das atividades solicitadas. Sendo assim, será mais um assunto abstrato e sem utilidade para eles. Estou consciente, enquanto docente, que as dificuldades que os alunos têm no tópico da Trigonometria, devem-se à sua introdução geralmente sem qualquer ligação à vida real.

Assim, e para colmatar as dificuldades apresentadas irei apoiar o meu trabalho na criação de uma sequência de tarefas promotoras do desenvolvimento matemático dos alunos. É de salientar a necessidade da diversificação das tarefas já que cada uma desempenha um certo papel na aprendizagem. Ponte (2005), num artigo acerca da Gestão Curricular em Matemática, afirma que existem diversos tipos de tarefas:

> As tarefas de natureza mais fechada (exercícios, problemas) são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados.
> As tarefas de natureza mais acessível (explorações, exercícios), pelo seu lado, possibilitam a todos os alunos um elevado grau de sucesso, contribuindo para o desenvolvimento da sua autoconfiança.
> As tarefas de natureza mais desafiante (investigações, problemas), pela sua parte, são indispensáveis para que os alunos tenham uma efetiva experiência matemática.
> As tarefas de cunho mais aberto são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas (Ponte, 2005, p. 26).

A escolha das tarefas vai ao encontro de vários tipos de representação e torna-se essencial que estas proporcionem um percurso de aprendizagem coerente e que permita aos alunos a construção dos conceitos, a compreensão dos procedimentos, o conhecimento das formas de representação relevantes e das conexões de cada conceito dentro do tópico escolhido. Também o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1994) recomenda ao professor que escolha e construa tarefas que possam promover o desenvolvimento dos conceitos e processos e, ao mesmo tempo, estimulem a capacidade de resolver problemas, raciocinar e comunicar matematicamente. Segundo este documento, uma boa tarefa é aquela que não separa o pensamento matemático dos conceitos matemáticos, que desperta a curiosidade dos alunos e que os convida a elaborar conjeturas. Deste modo, as tarefas que o professor propõe devem encorajar os alunos "a raciocinar sobre ideias matemáticas, a estabelecer conexões, e a formular, enfrentar e resolver problemas" (NCTM, 1994, p. 34).

Assim, e para que possa haver diversificação de tarefas juntei à sequência escolhida o uso da tecnologia. Este recurso está cada vez mais presente no nosso dia-a-dia tendo-se tornado essencial. Cada vez mais a integração das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) pode ser uma mais-valia para a Educação, em especial para a Educação Matemática.

Tal como afirma Papert (1994, p.10), "a escola é um notável exemplo de uma área que não mudou tanto. Pode se dizer que não houve qualquer mudança na maneira como nós distribuímos a educação aos nossos estudantes". Enquanto professora decidi aceitar o desafio da mudança e procuro novas formas de ensinar e aprender processos que possibilitem a construção de tarefas coerentes para usufruir do uso dessas tecnologias.

Tradicionalmente, a Matemática desafia professores e alunos. Não existem "receitas" prontas para prender a atenção dos discentes. Urge motivá-los!

A alternativa escolhida, para esta motivação e para superar as dificuldades enumeradas passa também pela utilização de tecnologias na sala de aula, pois elas estão presentes no nosso quotidiano e cada vez mais exercem um papel fundamental na educação, especialmente na Educação Matemática. Centrando o uso das TIC na utilização do programa de *software* educativo de Geometria Dinâmica *Geogebra*, irei apresentar algumas contribuições na criação de situações que facilitem a compreensão e o processo de construção dos conhecimentos dos alunos no tópico da Trigonometria.

Na aprendizagem da Matemática e, consequentemente, no trabalho dentro e fora da sala de aula, tem de haver necessariamente a resolução de exercícios e atividades de memória e treino, como forma de consolidação dos conhecimentos. No entanto, a aquisição efetiva ficaria incompleta se não existisse a resolução de problemas. Esta permite uma aprendizagem ativa, ajudando os alunos a construírem conhecimento matemático novo e também testar os seus conhecimentos sobre os diversos tópicos de aprendizagem. A seleção de problemas relacionados com tópicos de Matemática do programa, com o nível etário dos alunos e com os objetivos pretendidos de modo a proporcionar-lhes confiança nas suas capacidades, cabe ao professor. A utilização da resolução de problemas na prática educativa da matemática é uma metodologia que deve merecer atenção por parte de todos professores. Segundo Pólya,

> Resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. (...) se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom 'resolvedor de problemas', tem que resolver problemas (Pólya, 1994, p. 10).

Também a resolução de problemas cujo enfoque sejam situações da vida real assume importância na aquisição de conhecimento motivando os alunos para o desenvolvimento do modo de pensar matemático. Segundo Mendes (2009), o "professor deve procurar resgatar as relações existentes na realidade que possam criar condições alternativas, visando a compreensão e intervenção nesse contexto social onde o conhecimento é produzido" (p. 124). Nesse sentido, é fundamental considerar o conhecimento prévio do aluno para a produção do conhecimento.

Similarmente, as tarefas de investigação aparecem como expressões do trabalho de natureza não rotineira, referindo-se a processos matemáticos complexos e envolvendo atividade fortemente problemática (Martins, Maia, Menino, Rocha & Pires, 2002). O termo "investigação" é notado como uma atividade mais divergente em que se estimula o aluno a ser curioso, a procurar estratégias alternativas, a considerar o que sucederia se se alterassem certas condições ou a generalizar a situação (Chamoso & Rawson, 2001). As etapas a percorrer numa investigação passa, na maior parte dos casos por: (1) formular a questão a investigar; (2) formular conjeturas relativamente a essa questão; (3) testar as conjeturas e, eventualmente, reformulá-las; e (4) validar e comunicar os resultados (Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998).

Em suma, procuro estudar como se desenvolve a aprendizagem dos alunos no ensino da Trigonometria, usando uma abordagem que enfatiza os processos de raciocínio de alunos de uma turma do 9.º ano, na resolução de tarefas envolvendo as TIC, situações da vida real na Trigonometria do triângulo retângulo, investigação, e também no que respeita à justificação e generalização, enquanto processo-chave do raciocínio matemático.

Com este estudo espero ainda contribuir para o meu desenvolvimento profissional, assim como obter um melhor conhecimento da problemática do ensino aprendizagem deste tópico por parte da comunidade escolar.

### 1.2. Objetivo e questões da investigação

Tendo em conta as dificuldades dos alunos e a minha experiência enquanto professora do 3.º ciclo, neste trabalho procuro compreender como se desenvolve a aprendizagem dos alunos em Trigonometria tendo por base um conjunto de tarefas exploratórias com recurso às tecnologias, a problemas contextualizados em situações da vida real bem como à realização de investigações que conduzam à formulação de justificações e generalizações. Para responder a este objetivo considero as seguintes questões:

1. De que modos os alunos desenvolvem e relacionam conceitos trigonométricos quando usam as TIC?
2. Que capacidade de generalização e justificação os alunos mostram em Trigonometria?
3. Que estratégias usam e que dificuldades manifestam os alunos para resolver as tarefas propostas sobre a Trigonometria, contextualizadas na realidade?

# Capítulo 2

## QUADRO CONCEPTUAL

Este capítulo aborda questões relevantes para a conceção da unidade de ensino, estando organizado em cinco seções. A primeira refere-se às Tecnologias na educação e sua importância na diversificação das práticas de ensino. Segue-se uma seção que aborda a Resolução de problemas em contextos da vida real. A terceira seção centra-se nas Investigações em Matemática visando a aprendizagem com verdadeiro significado. A quarta seção é dedicada ao tema das Generalizações e Justificações e, por fim, é feita uma análise a trabalhos no campo do ensino e aprendizagem da Trigonometria.

### 2.1. As Tecnologias no ensino

A sociedade atual exige que o professor desenvolva novas competências e que atualize permanentemente os seus conhecimentos e os seus saberes. Estas exigências de qualificação e requalificação dos professores surgem da necessidade de estes contribuírem para a formação pessoal e integral do indivíduo e da sociedade. Como diz Oliveira (2007), a sociedade do conhecimento carece de profissionais da educação capazes de desenvolver ambientes de aprendizagem ricos e eficazes, fazendo uso racional das tecnologias disponíveis. Ciente de que irão surgindo sempre novos recursos, novas tecnologias e novas estratégias de ensino-aprendizagem, um professor bem formado consegue ter segurança para gerir a heterogeneidade dos seus alunos e, junto com eles, promover o desenvolvimento de uma aprendizagem constante.

A utilização criativa das tecnologias ajuda os professores a transformar o isolamento, a indiferença e a alienação que muitos alunos apresentam na sala de aula, em interesse, respeito e aprendizagens significativas. Consegui-lo, no entanto, constitui um desafio para o professor. Com efeito, Ponte (2000) afirma que:

> O professor, tal como o aluno, acaba por ter de estar sempre a aprender. Desse modo, aproxima-se dos seus alunos. Deixa de ser a autoridade incontestada do saber para passar a ser, muitas vezes, aquele que menos sabe. Assim, professor e aluno passam a ser parceiros de um mesmo processo de construção do conhecimento (Ponte, 2000, p. 76).

Há que aproveitar o interesse natural dos jovens pelas tecnologias e utilizá-las para transformar a sala de aula num espaço de aprendizagem ativa e de reflexão coletiva. Ponte (2000) afirma que as TIC podem ter um impacto muito significativo no ensino de disciplinas específicas como a Matemática, uma vez que a sua utilização pode reforçar a importância da linguagem gráfica e de novas formas de representação, valorizar as possibilidades de realização de projetos e atividades de modelação, exploração e investigação.

Borba e Penteado (2001) afirmam que as TIC enfatizam o aspeto da experimentação. Isto, por sua vez, leva a inverter a ordem de exposição oral da teoria com os exemplos e exercícios usuais no ensino tradicional, e possibilita uma nova sequência didática que parte da exploração e investigação até chegar aos conceitos. Os autores apresentam também vantagens para a prática docente no uso das TIC na Educação Matemática, argumentando que este uso traz novas possibilidades.

A criação de momentos que valorizem a investigação e a descoberta, por meio de trabalhos desenvolvidos no computador, por exemplo, permite aos alunos perceberem que as tecnologias não são apenas momentos de lazer, mas também, momentos riquíssimos de estudo. Isto se aproxima bastante daquilo que Papert (1994) escrevia quando se referia ao computador como sendo a máquina das crianças.

Em relação ao uso de *softwares* educativos no ensino da Matemática, Gravina e Santarosa (1998) afirmam que a aprendizagem desta disciplina está dependente de ações que caraterizam o “fazer Matemática”: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. Quando o aluno se torna num sujeito ativo que investiga e explora, orientado por um professor preparado para se colocar numa posição de mediador, a formalização e a concretização mental de conceitos são uma consequência natural do processo. Assim, a efetiva contribuição de *softwares* educativos no processo de ensino-aprendizagem está diretamente ligada aos recursos e à forma como estes são utilizados.

Gravina (2001) afirma que "os ambientes de Geometria Dinâmica são ferramentas dinâmicas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de objetos geométricos a partir das propriedades que os definem" (p. 82). A autora afirma que os ambientes de Geometria Dinâmica ajudam os alunos a transpor a barreira do raciocínio apenas empírico para o raciocínio hipotético-dedutivo, ou seja, do raciocínio baseado em demonstrações de teoremas para o raciocínio baseado na observação e experimentação. Segunda autora, os benefícios e as contribuições que os ambientes de Geometria Dinâmica podem trazer para a aprendizagem da Matemática podem ser estendidas para diversas áreas do saber:

> Na transição do conhecimento empírico para o que tem carácter de teoria matemática, mostra-se necessária uma crucial reestruturação da forma de pensar, e a tecnologia informática pode muito bem intermediar o desenvolvimento das habilidades cognitivas que aí entram em jogo (Gravina, 2001, p. 5).

Um outro aspeto que merece destaque é o interesse que o uso da tecnologia desperta quer da parte de quem ensina, quer de quem aprende, a motivação é maior. A sua utilização faz com que os alunos adquiram uma maior independência em relação ao professor, uma vez que este assume um mero papel de mediador da atividade. Como produto final, o aluno precisa de programar o computador, apresentando-se mais disposto a ensinar ao colega com maior dificuldade, estreitando-se, assim, as relações entre o professor, os alunos, a máquina e a Matemática.

Na perspetiva de Borba e Penteado (2001), os computadores não substituem os seres humanos nem simplesmente os complementam, mas auxiliam na reorganização do pensamento, com outras formas de proceder à formulação e à resolução de problemas. A tecnologia não implica a abolição da escrita e da oralidade, nem das demonstrações matemáticas, havendo apenas transformações ou remodelações. É necessário, portanto, que os professores estejam preparados, sejam capazes de fazer um grande investimento intelectual e disponibilizarem do seu tempo livre. A frequência em formação contínua, a descoberta de novos materiais, a preparação de materiais pedagógicos, a avaliação das experiências realizadas e o diálogo com os colegas, são exemplos de ações dos professores no sentido de desenvolverem projetos pedagógicos cujo objetivo é a construção de aprendizagens significativas por parte dos alunos. Deste modo, o crescimento do progresso tecnológico, ao oferecer variadas e novas possibilidades, não desacentua o trabalho do professor, exige, sim, mais tempo, mais trabalho e um grande esforço de atualização.

Em síntese, o uso adequado das TIC em contexto educativo implica uma mudança do papel do professor e a respetiva alteração de mentalidades e de estruturação do processo ensino-aprendizagem. O professor tem de assumir um papel mais ativo como motivador da busca do conhecimento, parceiro na génese do saber e no apoio e orientação do aluno na sua trajetória educativa. Para isso, o professor necessita de uma formação voltada para o domínio das tecnologias para diversificar suas práticas de ensino no sentido de promover um ensino moderno e coerente com as constantes mudanças dos paradigmas impostos por uma sociedade cada vez mais informatizada.

## 2.2. Resolução de problemas em situações de realidade

A publicação da obra *How to solve it* de George Pólya (1945) está na base de um grande interesse em relação à resolução de problemas por parte dos educadores matemáticos. Para este autor, o professor deve propor na sala aula problemas aos seus alunos de modo a que estes sejam estimulados nas suas capacidades matemáticas e a sentirem o gosto pela descoberta. Considera isso uma condição fundamental para que os alunos possam perceber a real natureza da Matemática e desenvolver o seu gosto pela disciplina.

Estas ideias afetam de forma relevante os documentos de orientação curricular atuais. Assim, na *Agenda para a ação* do NCTM (1980), a resolução de problemas tem um papel de destaque. Nas *Normas profissionais para o ensino da Matemática*, o NCTM (1991) defende que os alunos, na sua aprendizagem da Matemática, devem "ser capazes de formular e resolver problemas, de julgar o papel do raciocínio matemático numa situação da vida real, e de comunicar matematicamente" (p. 21). Podemos dizer que, atualmente, a resolução de problemas constitui um traço essencial das orientações curriculares de todos os níveis de ensino, desde o início do ensino básico até ao ensino superior. Quando se ensina Matemática por meio da resolução de problemas, os estudantes utilizam seus conhecimentos prévios, além de aprenderem uma Matemática com mais sentido.

Em Portugal, a resolução de problemas tem sido valorizada nos documentos curriculares:

> A resolução de problemas é uma actividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático. Neste processo, os alunos devem compreender que um problema matemático, frequentemente, pode ser resolvido através de diferentes estratégias e dar atenção à análise retrospectiva da sua resolução e apreciação das soluções que obtêm. (ME, 2007, p. 6)

O programa de Matemática do ensino básico de 2007 (ME, 2007) valoriza a importância da Matemática à vida real e insere a modelação matemática como uma metodologia de ensino-aprendizagem, que privilegia a construção do conhecimento pelo aluno, através de problemas de investigação relacionados com a realidade. Esta metodologia exige uma maior interação entre professor e aluno.

Na modelação matemática, como ambiente de aprendizagem, os alunos são convidados a estudar por meio da Matemática, situações com referência na realidade (Barbosa, 2001). A modelação matemática como ambiente de aprendizagem tem sido pesquisada, principalmente nos últimos anos, como uma prática de sala de aula que tem por objetivo o ensino para e com compreensão (e.g., Barbosa, 2001, 2003; Blum, Galbraith, Henn & Niss, 2007; Blum & Ferri, 2009; Haines, Galbraith, Blum & Khan, 2011; Jurkiewicz & Friedman, 2010; Kaiser, Blum, Ferri & Stillman, 2011; Mendonça & Lopes, 2011; Oliveira & Oliveira, 2012).

O processo de modelação inclui diversas fases, tendo como ponto de partida a situação real, passando pelo modelo real e pelo modelo matemático, terminando nos resultados matemáticos. São vários os estudos que indicam, ainda, a ocorrência de uma representação mental da situação aquando da resolução das tarefas de modelação, devendo ela ser incluída no ciclo de modelação, tal como se observa na figura 1 (Ferri, 2006). Esta figura apresenta o ciclo de modelação e as seis áreas pelas quais o aluno pode passar, bem como as subatividades existentes na transição entre as fases, constituindo os diversos passos de modelação: compreender, simplificar/estruturar, matematizar, trabalhar matematicamente, interpretar e validar (Blum & Ferri, 2009). Este modelo apresenta a grande vantagem de constituir uma representação do processo teórico de resolução (Ärlebäck, 2009), que possibilita a divisão do ciclo de modelação em subatividades (Ferris, 2006). O conhecimento dos passos de modelação, a sua transição e as barreiras cognitivas são elementos fundamentais no ciclo de modelação (Blum & Ferri, 2009).

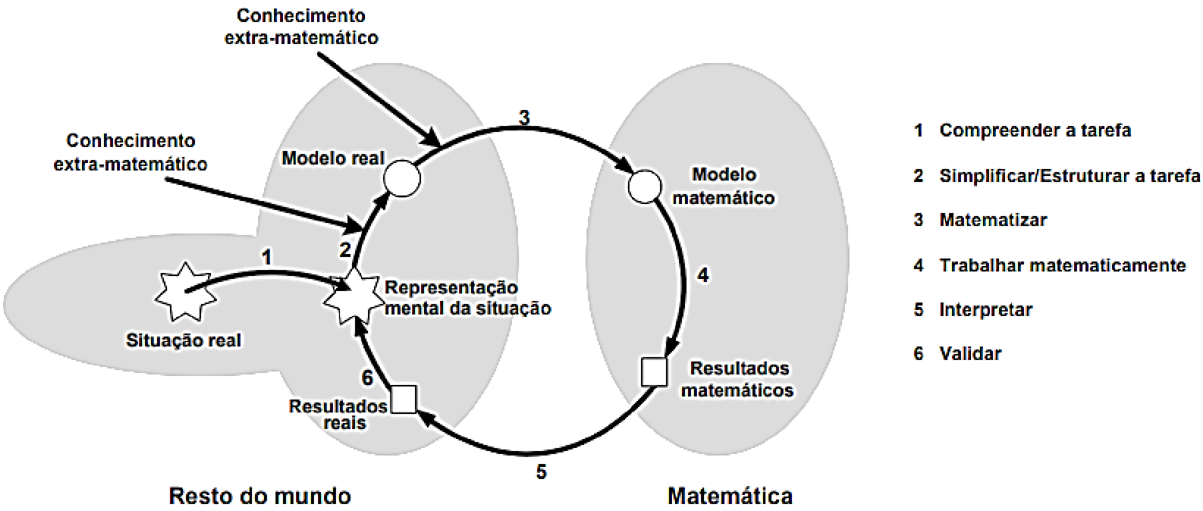



Figura 1 – Ciclo de modelação sob uma perspetiva cognitiva (adaptado de Ferri, 2006)

A modelação matemática é reconhecida como uma atividade que deve ser desenvolvida em pequenos grupos (Stender, 2012) facilitando, assim, o desenvolvimento de competências tais como a argumentação, comunicação e resolução de problemas. Por conseguinte, faz com que os alunos trabalhem de forma eficaz no problema, dando-lhes a oportunidade de apresentarem os seus resultados e também o poder de discutir, argumentar os trajetos efetuados, promovendo desta forma o desenvolvimento das capacidades transversais (Ponte et al., 2007).

A resolução de problemas em contexto da vida real dá oportunidade aos alunos de construção de conceitos, do desenvolvimento da autonomia e da capacidade de contextualizar as situações apresentadas com o mundo à sua volta, além de relacionar os novos conhecimentos com os já existentes. Em síntese, a realização de tarefas com ligação à vida real, pode contribuir para o desenvolvimento dos objetivos gerais do ensino da Matemática, com destaque para a importância da aprendizagem significativa, o desenvolvimento do espírito crítico e da capacidade de comunicação.

### 2.3. Investigações matemáticas

No ensino da Matemática ainda está enraizado um método expositivo em que o papel dos alunos é quase cem por cento passivo, o que contraria todas as orientações que incentivam à utilização de uma metodologia ativa, estabelecendo diálogos com os alunos e estimulando a sua imaginação, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à (re)descoberta. Baseando a opinião nas leituras efetuadas conclui-se que, este método limita a oportunidade dos alunos construírem as suas experiências e monitorizarem as suas aprendizagens.

Para que tal aconteça, tem de existir uma rutura com as aulas essencialmente expositivas na aprendizagem da Matemática, dando lugar a atividades de investigação. Nesta perspetiva, Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), tal como Mason (1996), defendem a importância da realização de investigações matemáticas pelos alunos. Em Portugal, o projeto MPT (Abrantes, Leal & Ponte, 1996; Abrantes, Ponte, Fonseca & Brunheira, 1999) gerou um trabalho marcante neste campo.

Quer as tarefas de investigação, quer os problemas, podem surgir em contexto real, no entanto, também é possível formular problemas, exercícios e investigações em moldes puramente matemáticos. Diversas experiências realizadas no âmbito do Projeto MPT (Abrantes, Ponte, Fonseca & Brunheira,1999) demostram que os alunos se envolvem nestas tarefas com tanto ou mais entusiasmo como aquele que investem em tarefas que remetem para contextos reais.

As principais razões que estão na base da importância das investigações são similares às apresentadas sobre o valor dos problemas, acrescentando-se ainda que as investigações, mais do que os problemas, promovem o envolvimento dos alunos, pois exigem a sua participação ativa desde a primeira fase do trabalho – a formulação das questões a resolver. Assim, a investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, contribui para uma visão diferente e para uma nova perspetiva da Matemática, permitindo concretizar o espírito de atividade matemática genuína, sendo, por isso, uma poderosa ferramenta pedagógica. Ao aluno é solicitado que use as suas capacidades matemáticas não só na resolução de exercícios padronizados e na formulação de questões, na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados, na discussão e argumentação com os colegas e o professor (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2009).

Pode-se, assim, afirmar que a investigação matemática promove a socialização, a integração e a troca ideias entre os intervenientes, funcionando como promotora de um ambiente estimulador, criativo, no qual o aluno tem a liberdade de expor os seus pensamentos e resoluções aos colegas e ao professor. A investigação matemática representa uma mudança em relação às tradicionais aulas de Matemática:

> Há diferentes aspetos envolvidos no processo de mudança de paradigma de exercícios para os cenários para investigação. Os padrões de comunicação podem mudar e abrir-se para novos tipos de cooperação e para novas formas de aprendizagem. [...] Em particular, estamos interessados na possibilidade de os alunos participarem ativamente do seu processo de aprendizado. Tanto o professor quanto os alunos podem ser acometidos por dúvidas quando chegam a trabalhar num cenário de investigação, sem a proteção de “regras” de funcionamento bem conhecidas do paradigma do exercício. Assim, deixar o paradigma do exercício significa também deixar uma zona de conforto e entrar numa zona de risco. Quais são os possíveis ganhos do trabalho numa zona de risco associada a um cenário para investigação? Vemos que isso está intimamente relacionado com o surgimento de novas possibilidades de envolvimento dos alunos, de padrões de comunicação diferentes e, consequentemente, novas qualidades de aprendizagem (Alro, H. e Skovsmose O., 2006, p. 58).

É importante sublinhar que investigação matemática envolve muito mais do que o ato de resolver problemas, sejam eles de maior ou menor dificuldade. Com ela, tomam-se como base pedagógica questões que nos interessam e que se apresentam inicialmente confusas, mas que se clarificam e estudam de modo organizado. Nesse sentido, para Ponte (2002) investigar corresponde a realizar descobertas, recorrendo a processos metodologicamente válidos, como formular problemas, explorar hipóteses, fazer e testar conjeturas, generalizar e construir raciocínios e demonstrações. Nesta perspetiva, como indica o autor, investigar é descobrir relações, padrões procurando identificar e comprovar as propriedades e hipóteses previamente levantadas. Destaca ainda a importância da investigação matemática por contribuir para a construção do conhecimento, levando o aluno a intuir, conjeturar, experimentar, provar, avaliar, e apresentar o (s) resultado (s) encontrados, promovendo a autonomia, a cooperação e a capacidade de comunicação oral e escrita. Os objetivos das investigações matemáticas são assim indicados por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006):

> Ajuda a trazer para sala de aula o espírito da atividade genuína, construindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os colegas e o professor (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2006, p. 23).

A atividade de investigação matemática é proposta pelo professor mediador, que faz a sua planificação prévia, sendo também ele o responsável por realizar as observações e registar as evidências de como o aluno aprende Matemática, ao procurar compreender uma determinada situação e encontrar a sua solução.

As atividades de investigação podem ser propostas com base no manual, com atividades apoiadas em materiais manipuláveis e lúdicos ou no uso das TIC, abordando questões ou situações problemas com um grau de dificuldade variável, das mais simples às mais complexas. Todas elas contribuem para mobilizar saberes e consolidar conhecimentos matemáticos e para desenvolver capacidades de nível superior. Isso mesmo é referido por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006):

> Investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações Matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura teste-demonstração (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2006, p. 10).

Investigar é formular problemas e procurar soluções. No que concerne ao ensino-aprendizagem, trata-se de proporcionar ao aluno condições para trabalhar didaticamente a partir de perguntas que nos interessam, e que inicialmente se apresentam de forma confusa, sem significados, mas que se tornam claras, numa fase posterior.

## 2.4. Generalização e Justificação

Generalizar é uma atividade importante em Matemática e, por isso, muitos investigadores mostraram interesse em definir e caracterizar. Mason (1996) vai ao ponto de considerar a generalização como sendo "o coração da Matemática" já que, na sua perspetiva, o pensamento matemático não surge se os alunos não generalizarem e não expressarem as suas generalizações. De facto, desenvolver a capacidade de generalizar é uma das finalidades principais do ensino da Matemática (NCTM, 2000). Surgem então duas questões: (i) Como se define "generalizar"? (ii) Quais os processos que os alunos utilizam para generalizar?

Kaput (1999), define generalizar como sendo o prolongar de um raciocínio ou comunicação para além da situação ou situações em estudo, identificando de modo preciso as relações existentes entre elas. O foco da generalização não está nos casos ou situações iniciais, mas nos padrões, procedimentos, estruturas e relações entre a totalidade das situações. Pelo seu lado, Ellis (2011), define generalizar como sendo uma atividade onde indivíduos, dentro de um contexto específico sócio-matemático, identificam o que é comum entre diversos casos ou alargam o raciocínio para além do caso original ou ainda derivam resultados mais amplos a partir de casos particulares. Nesta última situação, a metodologia utilizada pelos alunos para confirmar os seus raciocínios com a utilização de casos particulares, é considerada como um procedimento importante no processo de generalização. Tal como referem Blanton e Kaput (2005),

> O pensamento algébrico pode ser encarado como um processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade (Blanton & Kaput, 2005, p. 413).

Diversos autores encaram a generalização como o elemento central do pensamento algébrico (e.g., Blanton, 2008; Carraher, Martinez & Schliemann, 2008; Kaput, 2008; Mason, 1996). Carraher, Martinez e Schliemann (2008) afirmam que "a generalização matemática envolve uma afirmação de que uma propriedade ou técnica é válida para um conjunto de objetos matemáticos" (p. 3). Já Mason (1996) defende que, uma das maneiras de desenvolver a generalização é sensibilizar para a diferenciação entre "olhar para" e "olhar através", combinando-se esta última com a capacidade de ver a generalização a partir do particular.

As formas como a generalização podem ser expressas, são variadas. Na infância, as crianças podem expressar as generalizações que observam no mundo numa linguagem natural e, gradualmente usar formas mais simbólicas (Blanton, 2008). Também o NCTM (2008) recomenda que o emprego dos símbolos, como forma de representar ideias matemáticas, deve aparecer depois do contacto com outras formas de representação menos convencionais, o que irá facilitar a compreensão dos conceitos. Argumentando que será mais compreensível, posteriormente, estabelecer conexões entre a linguagem natural e a linguagem simbólica, criando momentos para que os símbolos surjam com significado. Por sua vez, Blanton e Kaput (2011), argumentam na importância de facultar às crianças oportunidades de iniciarem o uso de representações simbólicas desde os anos inicias, proporcionando-lhes gerar um maior espaço cognitivo para explorar posteriormente as ideias mais complexas.

Alguns autores defendem que, para que haja o aparecimento de generalizações, é fundamental que o professor proponha tarefas, preferencialmente de natureza exploratória, criando oportunidades aos seus alunos de generalizar (Lannin, Ellis, & Elliot, 2011; Ponte, 2007). Quando as tarefas são bastante ricas, estimulam abordagens de resolução generalizáveis e promovem momentos de discussão em que se estabelecem conexões entre diferentes representações e processos de resolução. Deste modo, Ponte (2014) refere que:

> a generalização surge de uma representação coletiva que tem raiz na comunidade, ocorrendo através de experiências mediadas pela interação, linguagem e outras ferramentas próprias. As interações dos alunos suportam e moldam as atividades de generalização, sendo eles que tomam decisões sobre o que tem interesse e o que querem validar. Naturalmente que o papel do professor é também crucial para a promoção de uma cultura de sala de aula que incentive a partilha de generalizações e o encorajamento de justificações e clarificações (Ponte, 2014, p. 289)

Vários estudos dedicam a sua atenção às práticas de ensino que promovem os processos de generalização matemática. O estudo de Ellis (2007), decorre de uma experiência de ensino com alunos do 7.º ano e 8.º ano e resultou numa classificação que distingue a atividade dos alunos à medida que formulam generalizações e justificações. As três categorias de ação que surgiram da análise da autora foram: (i) relacionação, na medida em que se formou uma associação entre dois ou mais problemas; (ii) procura, dado que se repetem ações na tentativa de localizar elementos similares; (iii) extensão, na qual se difunde um padrão ou relação para uma construção mais geral.

Henriques (2010), no estudo realizado com alunos do 2.º ano de uma licenciatura, verificou que estes revelaram facilidade na formulação de conjeturas ainda que nem sempre estes tenham surgido de forma explícita. No entanto, as generalizações que surgiram de modo imediato foram quase sempre baseadas em analogias, na identificação de padrões partindo de exemplos ou na experimentação de casos isolados ou não sistematizados.

Mestre (2014) fundamentou o seu estudo numa prática de ensino exploratório, com uma turma do 4.º ano. Era seu objetivo identificar as ações da professora/investigadora que contribuíam para a construção coletiva da generalização centrando a atenção na realização da tarefa em particular nos momentos da discussão coletiva e nos momentos de sistematização. Ao longo da sua pesquisa, conseguiu estabelecer um paralelo entre a construção progressiva da representação da generalização assumida coletivamente pela turma e seis das ações principais utilizadas pela professora: 1) promover a discussão pública das ideias dos alunos; 2) encorajar a clarificação e justificação das ideias; 3) encorajar a procura de relações; 4) encorajar a extensão de uma ideia para além do caso apresentado; 5) encorajar o sentido crítico, promovendo a validação ou rejeição das ideias apresentadas; e 6) refocar a atenção nas relações matemáticas (p. 283).

Esta pesquisa vai de encontro à argumentação de que é possível, em ambientes adequados, as crianças desde os primeiros anos de escolaridade estarem aptas de tornar explícito o conhecimento que usam quando mostram raciocínios e justificações e são capazes de refletir a natureza dos argumentos e aplicar, os resultados gerais a que chegam, a exemplos mais específicos. Desta forma, o início da aprendizagem da generalização matemática, ao assentar-se na compreensão de que os princípios matemáticos têm sempre justificações e na capacidade de as produzir e avaliar, situa-se no ensino básico, e em particular nos primeiros anos de escolaridade.

A seleção de tarefas que ajudem os alunos a criarem e descreverem regularidades, a formularem conjeturas, a explorarem estas conjeturas e a produzirem justificações para as validarem ou rejeitarem, têm um papel crucial na aceitação da premissa que a aprendizagem da atividade de generalizar se deve iniciar cedo. É igualmente importante a criação de uma cultura em sala de aula que estimule e valorize as tentativas de justificação elaboradas pelos alunos e que a sua validade não seja feita pelo professor ou pelo manual mas pela argumentação dos alunos (Balacheff, 1991). Desta forma, é fundamental debater com os alunos a validade matemática das justificações apresentadas, para que compreendam o que pode validar uma justificação (NCTM, 2007), rejeitando justificações apoiadas na autoridade, perceção da situação, senso comum ou num número insuficiente de casos particulares (Lannin et al., 2011). Ao longo do tempo, os alunos devem evoluir e apresentar justificações cada vez mais formais do ponto de vista matemático, A este respeito, Mata-Pereira (2018), afirma que: "Conforme progridem no seu percurso escolar, a perceção sobre o que valida ou invalida uma justificação deve promover justificações cada vez mais formais, muitas vezes próximas ou equivalentes a demonstrações matemáticas" (p. 13).

Com efeito, no 1.º ciclo do ensino básico, a validação não é realizada através de demonstrações formais mas baseia-se na apresentação de justificações de um determinado resultado. Cabe ao professor propor tarefas que permitam aos alunos a experimentação de exemplos diferentes e incentivá-los a explicar e justificar as suas ideias e processos criando assim, hábitos de justificação que despertam o pensamento, estruturando-o e desenvolvendo o raciocínio matemático. O NCTM (2007) salienta a importância da justificação desde os primeiros anos de escolaridade referindo que "desde as suas primeiras experiências no campo matemático, é importante ajudar as crianças a compreenderem que as afirmações deverão ser sempre justificadas" (p. 61). Para tal acontecer, o professor assume um papel muito importante na forma de questionar os seus alunos. Questões do tipo: "Por que é que pensas que isto é verdade? Alguém aqui acha que a resposta é diferente, e porquê?" (NCTM, 2007, p.61) ou "Porquê? Porque será que isto acontece? O que acontece se…?" (ME, 2007, p.30), podem desencadear hábitos de justificação e apoiar o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Em Portugal os documentos designados de Aprendizagens Essenciais, indicam que os alunos no final do 1.º ciclo, devem "Exprimir, oralmente e por escrito, ideias matemáticas, e explicar raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática (convenções, notações, terminologia e simbologia)" (p. 8). No 2.º ciclo, os alunos devem ser incentivados a valorizar processos de resolução e a explorarem situações sabendo construir justificações matemáticas usando terminologia e simbologia adequadas, quer oralmente, quer por escrito, para explicarem aos colegas e ao professor. O documento das Aprendizagens Essenciais adiciona no 2.º ciclo, comparativamente ao 1.º ciclo, o "recurso a exemplos e contraexemplos" (p. 8).

Ao professor cabe incentivar os alunos a considerar as justificações dos colegas e a reformular as suas ideias colocando, eventualmente, novas questões e desafios. É importante favorecer a abertura de horizontes aos alunos, evitando que o pensamento matemático se reduza a uma única estratégia de resolução e justificação. Deste modo, as justificações com base em argumentos matemáticos apresentadas pelos alunos, na formulação e teste de conjeturas devem ser estimuladas pelo professor com base em questões do tipo: “A resposta está bem justificada? Haveria outras justificações?” (ME, 2007, p. 46). Em suma, a partilha e confronto de ideias e a justificação dos vários processos de raciocínio, constituem fatores que criam “oportunidades para a clarificação e desenvolvimento do pensamento e para a construção do conhecimento matemático” (ME, 2007, p. 46).

Para além de todos os processos de justificação já enumerados, acrescenta-se, no 3.º ciclo, a capacidade de argumentação baseada em procedimentos e aprendizagens realizadas anteriormente, propriedades e conceitos matemáticos, assentando matematicamente as declarações em todas as atividades realizadas (ME, 2007). Para além destas capacidades de justificação pertinentes para os alunos do 3.º ciclo, importa referir, uma aprendizagem progressiva dos métodos de demonstração. Nesta perspetiva, torna-se viável que os alunos se mostrem capazes de distinguir uma argumentação informal de uma argumentação formal. Sobre este assunto, Mata-Pereira (2018), assevera que: “Ainda que sem alcançar o rigor associado à demonstração matemática, as justificações deverão apresentar algumas das suas características, sendo mais formais do que em ciclos anteriores” (p. 15). Além disso, é importante que os alunos mostrem capacidade na transição entre a justificação através da linguagem natural para uma linguagem matemática formal (ME, 2007).

## 2.5. Estudos no campo do ensino e aprendizagem da Trigonometria

Diversos estudos dão indicações sobre as dificuldades dos alunos em Trigonometria e possíveis estratégias para apoiar a sua aprendizagem neste campo. Num desses estudos, Lindegger (2000) investigou a utilização de uma abordagem para o ensino da Trigonometria no Triângulo Retângulo, através da manipulação de modelos inseridos em situações-problema, que envolviam os conceitos de seno, cosseno e tangente. A sua expetativa era que a abordagem estudada constituísse um fator facilitador para a construção e a apropriação de conceitos da Trigonometria.

O estudo foi realizado numa escola da cidade de Taubaté no Estado de São Paulo, Brasil, com duas turmas da 8.ª série do ensino fundamental (o equivalente ao 9.º ano em Portugal). O autor designou uma das turmas como Grupo de Referência e a outra como Grupo Experimental. No primeiro grupo, constituído por 32 alunos, o estudo da Trigonometria foi abordado do modo usual: definições seguidas de exercícios. As aulas decorreram dentro do horário normal tendo sido lecionadas pela docente da disciplina sem a participação do investigador num total de 15 aulas de 50 minutos. A sequência de ensino, objeto da pesquisa, foi aplicada no Grupo Experimental formado por 24 alunos, tendo como referencial teórico Vygotsky, Vergnaud e Brousseau. Neste grupo, foram lecionadas pelo investigador 18 aulas de 50 minutos e, neste caso, a docente da disciplina foi apenas observadora.

O investigador pretendeu introduzir os conceitos das razões trigonométricas de maneira significativa para o aluno partindo da sua participação ativa – trabalhando em grupos preferencialmente de três elementos e usando inicialmente a linguagem própria dos alunos. A este respeito, Lindegger (2000) afirma: “Entendemos que a utilização de uma linguagem formal matemática é o fim de um processo de aprendizagem e não o início. Precisamos favorecer a interiorização dos conceitos antes de qualquer tentativa de formalização” (p. 81). Além disso, neste estudo foram utilizados materiais acessíveis, no ponto de vista económico, tais como uma maquete, modelos de triângulos feitos em madeira, construções geométricas feitas pelos alunos, cartazes e um modelo dinâmico de representações trigonométricas, todos construídos com a finalidade de proporcionarem a aprendizagem. O autor indica que a experiência é apoiada numa abordagem sócio-construtivista, iniciada com situações-problema, situações didáticas em que a participação ativa do aluno e as suas tomadas de decisão foram o fator promotor da aprendizagem com significado. A abordagem sócio-construtivista tem como ponto de partida tarefas que envolvam um desafio cognitivo assente em conhecimentos que a criança já domina. Desta forma, o professor funciona como um facilitador de aprendizagens, ao promover atividades que partem daquilo que os alunos já sabem, proporcionando a interação com os outros, envolvendo-se numa aprendizagem cooperativa. No que se refere a situações-problema o autor defende que a aprendizagem significativa só existe se os alunos forem confrontados com situações que eles não consigam resolver, isto é, a resolução de problemas é a origem e o critério de formação de conceitos. Por sua vez, para o autor, uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas entre um aluno ou um grupo de alunos e um professor, num determinado contexto, cuja finalidade é possibilitar a aquisição de conhecimento. O ponto de partida do estudo foi o uso de atividades práticas, ligadas à realidade, sempre por etapas e fazendo um paralelo à luz da história. Posteriormente o investigador recolheu as fichas realizadas pelos alunos (uma por cada grupo) para a análise dos dados. Em ambos os grupos foi realizado um pré-teste e um pós-teste. Nos dois grupos os resultados do pré-teste foram idênticos e com valores muito reduzidos, concluindo-se desta forma que o conhecimento inicial sobre os conceitos trigonométricos era inexistente. O mesmo não aconteceu com os resultados obtidos no pós-teste. O Grupo Experimental obteve resultados muito superiores aos do Grupo de Referência ainda que este tenha resolvido cerca de três vezes mais exercícios do que o outro grupo. Analisando os resultados da sua pesquisa, o autor concluiu que a resolução de problemas colocados em um contexto significativo para o aluno, advindos da realidade, seguida pela resolução de problemas formais que envolveram conceitos mais abstratos e abrangentes, finalizando com a discussão em pequeno grupo, seguida da discussão com toda a turma, foram fatores determinantes para a obtenção de melhores resultados.

Outro investigador, Junior (2006) explorou as possibilidades das TIC no ensino da Trigonometria. O foco foi resolução de problemas deste tópico com o auxílio da tecnologia, recorrendo ao *software Cabri-Géomètre II*, e procurando saber de que modo esta abordagem poderia influenciar o desenvolvimento de estratégias na resolução de problemas de Trigonometria. O estudo foi realizado numa escola pública da cidade de Agudos, no estado de São Paulo, Brasil, com 127 alunos da 2.ª série do ensino médio (o equivalente ao 11.º ano).

Destes 127 alunos, foram selecionados 6 para o estudo para participar numa intervenção com o uso do *Cabri Géomètre II*, mas como 2 nem sempre compareceram foram desclassificados permanecendo apenas 4. O critério de seleção visava o conhecimento de conceitos relacionados com Trigonometria durante a 2.ª série do ensino médio, bem como o conhecimento de informática. Assim, neste estudo, o foco encontrava-se na utilização conjunta dos recursos de Informática, da resolução de problemas e da formação de conceitos de Matemática.

O investigador seguiu uma metodologia qualitativa de natureza exploratória utilizando num total de cinco aulas, cada uma com duração de três horas durante cinco dias consecutivos. Saliente-se que o estudo foi realizado fora do horário letivo, no laboratório de Informática da escola. É de referir ainda que os alunos trabalharam com dois tipos de material didático facultado pelo professor: um deles propunha uma sequência pré-estabelecida de atividades, cujo propósito era a elaboração de um ciclo trigonométrico no *Cabri*; o outro propunha situações-problema sem indicação alguma para a sua resolução. Toda a intervenção foi acompanhada pelo investigador e os comentários e testemunhos dos participantes respeitantes à pesquisa foram transcritos para que houvesse forma de avaliar a influência que o uso do computador e do *software* teve sobre a resolução dos problemas propostos.

A fundamentação teórica baseou-se na doutrina da formação de conceitos de Klausmeier e Goodwin, na teoria de Sternberg sobre a resolução de problemas e na teoria de Ausubel sobre a aprendizagem significativa. Segundo Júnior (2006), sempre que o aluno conhecesse os conceitos básicos da Trigonometria., apresentaria uma atitude mais positiva face ao trabalho a desenvolver e deste modo encontraria mais facilidade na resolução dos problemas propostos. O autor também salientou o que entende por problema ou situação problema, referindo que a sua existência só se verifica no caso de o aluno não conseguir dar resposta de imediato a um obstáculo apresentado. Refere ainda o que entende por teoria da aprendizagem significativa, mencionando que a aprendizagem é dita "significativa" para um aluno, quando existe interação entre as novas informações e os conceitos anteriormente adquiridos que tenham sido assimilados e consolidados na estrutura cognitiva do aluno. Na sua perspetiva, isto acontece quando o novo conhecimento se prende aos conceitos relevantes já existentes, levando a um armazenamento organizado e hierárquico da informação, isto é, os conceitos mais específicos são ligados aos mais gerais.

Segundo Júnior (2006), apesar do curto espaço de tempo desta intervenção, confirmou-se a sua expetativa de que o uso do *Cabri* promoveu uma "aprendizagem significativa". Para o autor,

> Os sujeitos expressavam-se verbalmente sobre os conceitos, relacionando-os de modo hierárquico em sua estrutura cognitiva, o que pode ser verificado, também, com a análise dos registros que o software faz das etapas construídas pelos sujeitos no computador (Júnior, 2006, p. 168).

Em jeito de conclusão, o autor menciona a dificuldade sentida pelos alunos aquando da resolução de problemas, mesmo sabendo tratar-se de conceitos trigonométricos. A partir do momento que passaram a usar o *software Cabri Géomètre II*, perceberam que poderiam experimentar propostas de resolução, verificar graficamente os resultados e, eventualmente, efetuar uma correção caso julgassem necessário.

No seu estudo, Miranda (2010), relata uma experiência de ensino da Trigonometria que visava sobretudo compreender de que forma a resolução de problemas contribui para a aprendizagem significativa dos alunos. As questões norteadoras do estudo sobre as quais incidem o seu trabalho baseiam-se nas estratégias utilizadas e dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução de problemas de Trigonometria do triângulo retângulo e quais os conhecimentos sobre a Trigonometria que os alunos põem em prática na resolução de problemas.

O estudo foi realizado numa Escola Básica dos arredores de Lisboa com uma turma do 9.º ano, constituída por 20 alunos sendo apenas 18 alvo de investigação. O método escolhido foi o trabalho cooperativo em grupo, desenvolvido por cinco grupos de trabalho, dos quais três eram constituídos por 4 elementos e dois por 3 elementos. Para a autora, apesar da existência de algumas possíveis dificuldades, a resolução de problemas em grupo proporciona aos alunos a possibilidade de interagirem entre si no confronto e discussão de estratégias de resolução, levando-os a aprender pelo facto de falarem, ouvirem, explicarem e pensarem matematicamente com os outros.

Após a constituição dos grupos, a investigadora selecionou um grupo, tal como inicialmente planificado, escolhendo aquele que na sua opinião seria o mais adequado para se fazer um registo áudio das possíveis discussões, que iriam surgir durante a realização das fichas de trabalho. Esta escolha recaiu no grupo considerado o mais heterogéneo quer ao nível de desempenho, quer ao nível de conhecimentos e atitudes. Aquando da realização da segunda tarefa, a investigadora selecionou outro grupo para fazer o registo áudio, passando assim a obter registos de dois. Esta mudança recaiu no facto do grupo inicialmente escolhido manifestar alguma inibição, uma vez que a sua discussão e trabalho estavam a ser registados em suporte áudio.

Os conteúdos abordados na sequência didática elaborada pela autora foram: introdução dos conceitos do seno, cosseno e tangente e respetiva notação; determinação de um ângulo agudo conhecendo uma razão trigonométrica; aplicação em situações concretas da vida real da razão trigonométrica adequada no cálculo de um comprimento ou de um ângulo agudo desconhecido; resolução de problemas envolvendo distâncias a locais inacessíveis utilizando razões trigonométricas; e estabelecimento de relações entre as razões trigonométricas. Como material utilizado, é de destacar o uso da calculadora, que permitiu aos alunos efetuar cálculos com maior desembaraço, que de outra forma se tornariam lentos, dando mais tempo aos alunos para se focarem nas estratégias de resolução. Após a exploração e resolução de cada tarefa, os grupos participaram numa discussão com toda a turma para partilha e discussão e para sistematização e institucionalização de conhecimentos.

Baseada na planificação anual da professora cooperante, Miranda (2010) preparou uma sequência didática que apostou na resolução de problemas para ser trabalhada em grupo e durante cinco blocos de 90 minutos, como estava inicialmente previsto. Foi-lhe ainda facultado mais um bloco de 90 minutos para a aplicação de um teste a fim de avaliar os conhecimentos dos alunos. A avaliação foi realizada tendo por base as tarefas elaboradas e o teste acima referido.

Num ambiente natural de sala de aula, a autora seguiu uma abordagem de investigação qualitativa, assumindo um cunho descritivo e interpretativo cujo intuito foi a observação, a análise e a interpretação dos processos desenvolvidos pelos alunos na resolução de problemas referentes a situações contextualizadas de Trigonometria do triângulo retângulo, bem como os conhecimentos postos em prática, as estratégias utilizadas e as dificuldades manifestadas na realização das fichas de trabalho.

Para dar resposta às questões em estudo, a investigadora recolheu as resoluções das tarefas, os trabalhos de casa, alguns exercícios do manual, o teste de avaliação, bem como as respostas ao questionário que apresentou aos alunos no final da unidade didática para recolher a sua opinião acerca do tipo de tarefas e de ensino aplicado.

Os resultados obtidos no teste de avaliação foram satisfatórios, registando-se apenas a existência de dois alunos com nível inferior a três, sendo a moda de suficiente.

Relativamente às respostas dadas pelos alunos ao questionário, que tinha como objetivo perceber até que ponto as tarefas propostas foram significativas para a sua aprendizagem, a autora verificou que a esmagadora maioria dos alunos (83,3%) refere que as tarefas propostas foram interessantes, indicando o trabalho de grupo como estímulo para que tal acontecesse.

Miranda (2010) concluiu o seu trabalho destacando as contribuições que a sua sequência de ensino promoveu:

> Numa perspetiva geral poder-se-á afirmar que as aulas proporcionadas pelo estudo foram ricas, permitindo que os alunos raciocinassem matematicamente sobre os problemas e possibilitaram o desenvolvimento da aptidão para explicitar oralmente o raciocínio utilizado, na procura de uma solução para o problema e para representar por escrito as ideias matemáticas, criando oportunidades para os alunos desenvolverem a comunicação escrita e oral, tanto com os colegas, como com a professora (Miranda, 2010, p. 104).

Em resumo, a procura por trabalhos e propostas de ensino da Trigonometria teve por objetivo conhecer o que outros professores e investigadores estudaram sobre o ensino-aprendizagem do tópico. Estes trabalhos mostram bem a intenção de promover um ensino diferenciado através de tarefas elaboradas com ideias, materiais e recursos alternativos, com destaque para a resolução de problemas, o uso de tecnologias e o trabalho em grupo.

# Capítulo 3

# A UNIDADE DE ENSINO

Neste capítulo apresento a unidade de ensino que serve de base a este estudo. Começo por referir o modo como a Trigonometria surge nos programas de Matemática, seguindo-se duas questões importantes na conceção da unidade, a diversidade de tarefas e a comunicação na sala de aula. Finalmente apresento a planificação geral e as tarefas a realizar em cada uma das aulas da unidade de ensino. Finalizo o capítulo com a avaliação dos alunos.

## 3.1. A unidade de ensino

A palavra *Trigonometria* vem do grego TRI - três, GONO - ângulo e METRIEN - medida, significa Medida de Triângulos. Trata-se, assim, do estudo das relações entre os lados e os ângulos de um triângulo. Tendo em conta o significado da palavra, percebe-se que o estudo da Trigonometria se inicia logo no 1.º ciclo com a noção básica de ângulo (ME, 2007, pp. 22-23). Já no 2.º ciclo, os alunos constroem triângulos, compreendem os casos de possibilidade na construção dos mesmos bem como as relações existentes entre os elementos de um triângulo e o saber usá-las na resolução de problemas (ME, 2007, p. 38). Durante o 3.º ciclo, mais concretamente nos 7.º e 8.º anos, são lecionados os Critérios de Congruência de Triângulos, Critérios de Semelhança de Triângulos, Teorema de Tales e Teorema de Pitágoras são lecionados e assumem um papel importante para a posterior compreensão do tópico da Trigonometria (ME, 2007, pp. 52-54).

É no 9.º ano que surge pela primeira vez uma unidade didática dedicada à Trigonometria. Esta é designada por Trigonometria do Triângulo Retângulo e permite aos alunos fazer um estudo das razões trigonométricas de ângulos agudos, a partir de triângulos retângulos semelhantes. Estudam-se também algumas relações entre as razões trigonométricas, nomeadamente a Fórmula Fundamental da Trigonometria e a fórmula que relaciona as três razões trigonométricas (seno, cosseno, tangente), além de serem propostos vários problemas tais como a determinação de distâncias inacessíveis (ME, 2007, p. 38).

Mas o tópico da Trigonometria não é encerrado no 9.º ano. É no ensino secundário mais precisamente no 11.º ano, segundo o Programa de Matemática (MEC, 2013, p. 17), que surge um conteúdo dedicado a este tópico – Trigonometria e Funções Trigonométricas. Esta unidade é consagrada a estabelecer uma definição para o seno e o cosseno de um qualquer ângulo convexo, justificando-se a escolha apresentada com a objetivo de estender a ângulos internos retos e obtusos, a Lei dos Senos e o Teorema de Carnot, que permitem resolver triângulos de forma simples e sistemática. É também objetivo deste tópico o uso adequado de uma calculadora científica para obter valores aproximados dos elementos de triângulos, objetos de resolução trigonométrica. A abordagem do estudo dos ângulos orientados e generalizados e respetivas medidas de amplitude é feita de seguida, generalizando-se as razões trigonométricas a estes ângulos, introduzindo-se o círculo trigonométrico. Após a definição do radiano como unidade de medida de amplitude, o aluno aprende a definir as funções reais de variável real seno, cosseno e tangente e a estudar as respetivas propriedades.

No 12.º ano, o tópico da Trigonometria continua a ser explorado no cálculo das derivadas das funções seno e cosseno, após o estabelecimento de algumas fórmulas trigonométricas. Existe ainda uma unidade denominada por Trigonometria e Números Complexos. O objetivo desta unidade é realizar um estudo intuitivo das funções trigonométricas com base no círculo trigonométrico, tanto a partir de um gráfico particular, como usando calculadora gráfica ou computador (MEC, 2013). Esta unidade encerra assim o estudo da Trigonometria realizado ao longo do ensino básico e secundário.

### 3.2. Tarefas

A aprendizagem da Matemática resulta num trabalho realizado para e pelo aluno e este é organizado pelas tarefas propostas pelo professor. Tal como refere o Programa de Matemática (ME, 2007, p. 13), o aluno deve deter diferentes tipos de experiências matemáticas, sobretudo resolver problemas, realizar atividades de investigação, desenvolver projetos, participar em jogos e ainda resolver exercícios que proporcionem uma prática compreensiva de procedimentos. Deste modo, cabe ao professor propor a realização de diferentes tipos de tarefa, dando uma indicação clara do que espera em relação ao trabalho que os alunos irão desenvolver, e apoiando-os na sua atividade.

Ponte (2014) refere que:

> As orientações curriculares atuais para a disciplina de Matemática a nível internacional estabelecem objetivos ambiciosos para a aprendizagem dos alunos, colocando desafios significativos à prática profissional dos professores. Na verdade, pretende-se que os alunos não só aprendam conceitos, representações e procedimentos matemáticos, mas sejam capazes de os usar para resolver uma grande variedade de problemas. Pretende-se, também, que sejam capazes de raciocinar matematicamente e de comunicar os seus raciocínios ao mesmo tempo que desenvolvem uma apreciação geral da Matemática como modo de pensar, de interpretar a realidade e de intervir sobre ela. No quadro de uma escolaridade obrigatória alargada, estes objetivos colocam-se a todos os níveis de ensino, e para a generalidade dos alunos (Ponte, 2014, p. 5).

O uso de tarefas em contexto de situações da vida real pode ser uma mais-valia no processo de ensino-aprendizagem para além de tornar a Matemática mais apelativa e acessível para os alunos. Porém, é importante que o contexto não ofusque a essência da tarefa.

Ponte e Quaresma (2012) referem como contexto o universo concetual relacionado a cada tarefa, o que pode remeter para um campo da vida quotidiana, do qual o aluno pode tirar um maior ou menor partido da experiência pessoal, ou simplesmente remeter apenas para o universo matemático. Skovsmose (2001) adiciona uma terceira dimensão para o contexto das tarefas – as tarefas de semi-realidade. Para este autor, as tarefas são reais quando retiradas diretamente do dia-a-dia dos alunos, matemáticas quando têm como referência a Matemática e são de semi-realidade quando se referem a algo que não existe na vida real, mas é construído, nomeadamente para fins educativos. No entanto, refira-se que contextos muito complicados podem levar a que uma tarefa seja mais de interpretação da questão do que realmente de Matemática.

No trabalho de planificação do professor, a diversificação de tarefas, o grau de complexidade e a respetiva duração são aspetos importantes a ter em linha de conta para a efetiva aprendizagem do aluno. Ponte (2005) refere que:

> Para que os alunos se apercebam do modo como a Matemática é usada em muitos contextos e para tirar partido do seu conhecimento desses contextos é fundamental que lhes seja proposta a realização de tarefas enquadradas em contextos da realidade (tarefas de aplicação e de modelação). No entanto, os alunos podem também sentir-se desafiados por tarefas formuladas em contextos matemáticos (investigações, problemas, explorações) e a sua realização permite-lhes perceber como se desenvolve a atividade matemática dos matemáticos profissionais. E, finalmente, pelas suas características muito próprias, as tarefas de longa duração (os projetos) têm um papel insubstituível no desenvolvimento de diversos objetivos curriculares e devem ser, por isso, contemplados na planificação anual do trabalho do professor (Ponte, 2005, p. 26).

Assim, a planificação da unidade de ensino baseia-se na diversificação de tarefas propostas aos alunos.

### 3.3. Trabalho na sala de aula

O ensino exploratório da Matemática tem-se revelado como uma prolífica alternativa ao ensino direto, uma vez que gera condições para os alunos se envolverem em atividades matemáticas ricas, que conduzam ao desenvolvimento de conhecimento matemático com compreensão, ligado ao desenvolvimento de capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemática (Canavarro, 2011; Cengiz, Kline, & Grant, 2011; Ponte, 2005).

Esta prática é uma atividade complexa, dado que na aula, para além da necessidade de uma planificação pormenorizada, é necessário também tomar uma série de decisões que resultam do modo como esta decorre, quer seja na escolha e sequência das resoluções dos alunos, quer na dinamização da discussão coletiva (Nathan & Knuth, 2003; Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013). Trata-se de um ensino fortemente interativo e, ainda que, o papel do professor seja bastante ativo e desafiante, o centro das atenções está no aluno em busca do seu raciocínio, da sua comunicação fazendo desta forma despontar o conhecimento matemático nos processos de negociação de significado (Bishop & Goffree, 1986; Canavarro, 2011; Guerreiro, 2011; Ponte, 2005).

No trabalho a desenvolver na sala de aula, a realização de um conjunto diversificado de tarefas é importante no entanto, não menos o são os momentos em que o professor deve promover para a discussão de estratégias da resolução das mesmas.

O Programa do Ensino Básico destaca a comunicação como uma importante capacidade transversal à aprendizagem matemática:

> Ouvir e praticar são actividades importantes na aprendizagem da Matemática mas, ao seu lado, o fazer, o argumentar e o discutir surgem com importância crescente nessa aprendizagem.
> Desenvolver a capacidade de resolução de problemas e promover o raciocínio e a comunicação matemáticos, para além de constituírem objectivos de aprendizagem centrais neste programa, constituem também importantes orientações metodológicas para estruturar as actividades a realizar em aula. Isso significa que o professor deve proporcionar situações frequentes em que os alunos possam resolver problemas, analisar e reflectir sobre as suas resoluções e as resoluções dos colegas. Significa igualmente que o professor deve dar atenção aos raciocínios dos alunos, valorizando-os, procurando que eles os explicitem com clareza, que analisem e reajam aos raciocínios dos colegas. A comunicação deve ter também um lugar destacado na prática lectiva do professor. Através da discussão oral na aula, os alunos confrontam as suas estratégias de resolução de problemas e identificam os raciocínios produzidos pelos seus colegas (ME, 2007, p. 9).

Também o National Council of Teachers of Mathematics (2007), NCTM, destaca o papel da comunicação como parte essencial da educação matemática. Assinala a importância de (i) organizar e consolidar o pensamento matemático através da comunicação, (ii) comunicar o pensamento matemático de forma coerente e clara entre colegas e professores, (iii) analisar e avaliar as estratégias e o pensamento matemático usados por outros, e (iv) usar a linguagem da Matemática para expressar ideias matemáticas com precisão.

A existência destas orientações curriculares fez com que no desenrolar de todas as tarefas propostas tenha privilegiado um tempo destinado à apresentação e discussão dos resultados obtidos quer entre os próprios alunos quer entre mim e a turma. A este respeito, Orton (2004) refere que as discussões professor-aluno e aluno-aluno impõem cuidado, uma vez que a criação de conceitos dos alunos está fortemente sujeita à utilização adequada da linguagem. A natureza da comunicação matemática depende muito do papel que o professor assume. Assim, cabe ao professor procurar efetuar uma comunicação com rigor e clareza, permitir aos alunos um tempo suficiente para raciocinar e também para ouvirem as ideias dos pares, colocar em discussão essas ideias e validá-las coletivamente e, finalmente salientar as conclusões a tirar. A este respeito, Ponte (2014) afirma que, “ Na abordagem exploratória, os alunos são chamados a desempenhar um papel ativo na interpretação das questões propostas, na representação da informação dada e na conceção e concretização de estratégias de resolução que devem depois saber apresentar e justificar” (p. 410). É também relevante e primordial estabelecer um ambiente de trabalho agradável e informal onde se privilegia o envolvimento ativo dos alunos para que a discussão possa ser lucrativa para todos.

Durante a discussão, a atuação do professor pode ajudar a inspirar nos alunos o respeito por saber ouvir os colegas, estabelecendo com eles regras de funcionamento, dedicando o tempo suficiente para ouvir as suas ideias e estimulando-os a pensar em questões a colocar, quando ouvem os outros alunos. Bishop e Goffree (1986), ao referirem a importância da gestão das atividades na sala de aula, defendem o ensino dessas mesmas regras como se de conteúdo se tratasse, referindo também que o professor se deve sujeitar a elas. A este respeito, Lo e Wheatley (1994) consideram desadequado que o professor, no exercício da sua autoridade em sala de aula, interrompa discussões acesas entre os alunos durante a resolução de um problema, sem os auxiliar a interpretar a situação em discussão ou a manifestar uma opinião.

Desta forma, as aulas de ensino exploratório decorrem ao longo de diversas fases. Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) consideram três fases, que designam de: (i) “lançamento” da tarefa; (ii) “exploração” pelos alunos; e (iii) “discussão e sintetização”. Oliveira, Menezes e Canavarro (2013) distinguem a fase de “discussão da tarefa” da fase de “sistematização das aprendizagens matemáticas”, a primeira mais específica e ligada às resoluções da tarefa pelos alunos e a segunda mais geral e designada à institucionalização do conhecimento matemático e de aspetos das capacidades transversais.

O papel do professor é crucial na preparação e implementação das tarefas a realizar, desde a forma como define a execução do trabalho, os recursos que proporciona, à gestão que faz do tempo e das interações na sala de aula. O papel que o professor atribui a si próprio e aos alunos, limita ou potencia as oportunidades de aprendizagem criadas a partir das tarefas (Smith & Stein, 1998).

A ação do professor é especialmente crítica no desenvolvimento de tarefas de natureza investigativa ou problemática, nas quais dirige a discussão da tarefa e orienta a sistematização das aprendizagens (Canavarro, 2011; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). A condução de aulas com estas características constitui, em muitos casos, um grande desafio para o professor.

A investigação permite concluir que as tarefas que apresentam um nível de desafio cognitivo elevado para os alunos, constituem também o maior desafio a nível da concretização na sala de aula para os professores (Stein & Lane, 1996). Estas tarefas tendem a ser também concetualmente exigentes para os professores e as aulas em que os alunos as realizam são mais difíceis de dirigir. A realização destas tarefas contrasta com as aulas convencionais de Matemática, durante as quais os professores apresentam um procedimento e, em seguida, observam os alunos enquanto eles o colocam em prática num conjunto de problemas semelhantes. As aulas em que se desenvolvem tarefas de elevado nível cognitivo envolvem a resolução de problemas ou explorações e exigem ao professor a capacidade de se relacionar com os conceitos que o problema envolve, de ouvir e compreender as estratégias de resolução dos alunos, e de os ajudar a organizar o seu raciocínio com o conhecimento formal da disciplina (Stein & Kim, 2008, p. 42)

A condução de aulas a partir de tarefas desafiantes, desenvolvidas numa lógica de ensino exploratório, é uma prática ainda pouco consolidada (Franke, Kazemi, & Battey, 2007). No entanto, trata-se de um tipo de prática letiva especialmente adequada para lidar com os atuais desafios curriculares, quer no que diz respeito ao desenvolvimento de capacidades transversais nos alunos, quer no que toca à abordagem compreensiva de tópicos matemáticos.

A tabela 1 estrutura as ações e propósitos relativos à minha prática de ensino exploratório de uma forma simplificada.

Tabela 1 – Ações intencionais do professor na prática de ensino exploratório da Matemática (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013)

| | Promoção da aprendizagem matemática | Gestão da aula |
|---|---|---|
| INTRODUÇÃO DA TAREFA | **Garantir a apropriação da tarefa pelos alunos:**<br>– Familiarizar com o contexto da tarefa<br>– Esclarecer a interpretação da tarefa<br>– Estabelecer objetivos<br>**Promover a adesão dos alunos à tarefa:**<br>– Estabelecer conexões com a experiência anterior<br>– Desafiar para o trabalho | **Organizar o trabalho dos alunos:**<br>– Estipular tempos para o trabalho a desenvolver em cada uma das fases da aula<br>– Definir formas de organização do trabalho (individual, pares, pequenos grupos, …)<br>– Organizar materiais da aula |
| REALIZAÇÃO DA TAREFA | **Garantir o desenvolvimento da tarefa pelos alunos:**<br>– Colocar questões e dar pistas<br>– Sugerir representações<br>– Focar ideias produtivas<br>– Pedir clarificações e justificações<br>**Manter o desafio cognitivo e autonomia dos alunos:**<br>– Cuidar de promover o raciocínio dos alunos<br>– Cuidar de não validar a correção matemática das respostas dos alunos | **Promover o trabalho de pares/grupo:**<br>– Regular as interações dos alunos<br>– Providenciar materiais para o grupo<br>**Garantir a produção de materiais para a apresentação pelos alunos:**<br>– Pedir registos escritos<br>– Fornecer materiais a usar<br>– Dar tempo para preparar a apresentação<br>**Organizar a discussão a fazer:**<br>– Identificar e selecionar resoluções variadas (com erro a explorar, menos ou mais completas, com representações relevantes)<br>– Sequenciar as resoluções selecionadas |
| DISCUSSÃO DA TAREFA | **Promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos:**<br>– Pedir explicações claras das resoluções<br>– Pedir justificações sobre os resultados e as formas de representação utilizadas<br>– Discutir a diferença e eficácia matemática das resoluções apresentadas<br>**Regular as interações entre os alunos na discussão:**<br>– Incentivar o questionamento para clarificação de ideias apresentadas ou esclarecimento de dúvidas<br>– Incentivar análise, confronto e comparação entre resoluções<br>– Identificar e colocar à discussão erros matemáticos das resoluções | **Criar ambiente propício à apresentação e discussão:**<br>– Dar por terminado o tempo de resolução da tarefa pelos alunos<br>– Providenciar a organização dos lugares/espaço para a discussão<br>– Promover atitude de respeito e interesse genuíno pelos diferentes trabalhos apresentados<br>**Gerir relações entre os alunos:**<br>– Definir a ordem das apresentações<br>– Cuidar de justificar as razões da não apresentação de algumas resoluções<br>– Promover e gerir as participações dos alunos na discussão |
| SISTEMATIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS MATEMÁTICAS | **Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a tópicos matemáticos suscitados pela exploração da tarefa:**<br>– Identificar conceito(s) matemático(s), clarificar a sua definição e explorar representações múltiplas<br>– Identificar procedimento(s) matemático(s), clarificar as condições da sua aplicação e rever a sua utilização<br>– Reconhecer o valor de uma regra com letras<br>**Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a capacidades transversais suscitados pela exploração da tarefa:**<br>– Identificar e relacionar dimensões da(s) capacidade(s) transversal(ais) presentes<br>– Reforçar aspetos-chave para o seu desenvolvimento<br>**Estabelecer conexões com aprendizagens anteriores:**<br>– Evidenciar ligações com conceitos matemáticos, procedimentos ou capacidades transversais anteriormente trabalhados | **Gerir ambiente adequado à sistematização:**<br>– Focar os alunos no momento de sistematização coletiva<br>– Promover o reconhecimento da importância de apurar conhecimento matemático a partir da tarefa<br>**Garantir o registo escrito das ideias resultantes da sistematização:**<br>– Fazer registo em suporte físico ou informático (quadro, acetato, cartaz…) por aluno ou professor<br>– Pedir registo escrito nos cadernos dos alunos |

## 3.4. Planificação da Unidade de Ensino

O principal objetivo deste estudo é procurar estudar como se desenvolve a aprendizagem dos alunos, de uma turma de 9.º ano, no ensino da Trigonometria, usando uma abordagem exploratória, baseada na resolução de tarefas envolvendo as TIC, situações da vida real na Trigonometria do triângulo retângulo, investigação, e também generalização, enquanto processo-chave do raciocínio matemático. Para atingir o objetivo proposto, para além de um conjunto de seis tarefas, incluindo a tarefa diagnóstica, que se encontram integralmente em anexo (anexo 3, 4, 5, 6, 7 e 8), foram também realizados exercícios de consolidação do manual (anexo 11, 12, 13 e 14) e uma ficha de trabalho (anexo 10). Desta proposta consta, ainda, um momento específico de avaliação realizado pelos alunos num trabalho individual, que também se encontra em anexo (anexo 15).

A planificação de uma unidade de ensino deve assentar em perspetivas claras sobre o modo como os alunos aprendem, tendo em conta que a atividade dos alunos é em grande medida influenciada pela orientação do professor. Deste modo, uma unidade de ensino deve ter por suporte a construção de uma trajetória de aprendizagem dos alunos, relativamente à qual se torna fundamental identificar: (i) Um objetivo; (ii) Um percurso de aprendizagem; e (iii) Estratégias e tarefas orientadas – o Programa do Ensino Básico (ME, 2007) refere que além dos exercícios "o aluno deve ter diferentes tipos de experiências matemáticas, nomeadamente realizando atividades de investigação, resolvendo problemas, desenvolvendo projetos, participando em jogos" (p. 8) sendo da responsabilidade do professor propor esses diferentes tipos de tarefas.

Neste sentido, o trabalho desenvolvido antes da concretização das aulas, envolve uma planificação atendendo às orientações curriculares, de modo a que o conteúdo temático resulte na organização de assuntos numa sequência de ensino coerente, bem como a um trabalho de equipa. Deste modo a tabela 2 evidencia um trabalho de equipa com vista a beneficiar o grupo disciplinar e consequentemente os alunos a que se destina o conteúdo. A tabela 3 expressa a planificação detalhada da unidade de ensino.

Tabela 2 – Planificação elaborada e aprovada em sede de Grupo e de Departamento

<table>
<tr><td colspan="8">2º Período (entre 26 de fevereiro a 23 de março) – Aulas previstas: 17 tempos de 45 min.</td></tr>
<tr><th>Tema</th><th>Conteúdos</th><th colspan="2">Domínios/Objetivos<br>Descritores</th><th colspan="2">Recursos<br>Estratégias/Atividades</th><th>Avaliação</th><th>Aulas Previstas</th></tr>
<tr><td>Trigonometria</td><td>1- Razões trigonométricas de ângulos agudos<br><br>2- Relações entre razões trigonométricas<br><br>3- Razões trigonométricas dos ângulos de 45°, 30° e 60°</td><td>Trigonometria (GM9)<br><br>11. Definir e utilizar razões trigonométricas de ângulos agudos.<br>12. Resolver problemas</td><td>GM9<br><br>11.1<br>a<br>11.13<br><br>12.1<br>a<br>12.3</td><td>• Materiais manipuláveis<br>• Materiais de escrita e de desenho<br>• Calculadora<br>• Computador (Geogebra; Excel)<br>• Caderno diário<br>• Manual<br>• Fichas de trabalho<br>• Fichas de revisão</td><td>• Tarefas<br>• Analogias com situações do dia-a-dia, para introdução/exploração de conceitos<br>• Comunicação<br>• Exercícios de aplicação e de consolidação<br>• Elaboração de esquemas síntese<br>• Exploração de recursos de apresentação e interativos em suporte digital<br>• Resolução de problemas</td><td>• Avaliação diagnóstica<br>• Avaliação formativa<br>• Avaliação sumativa<br>• Observação direta do aluno<br>• Participação na aula<br>• Responsabilidade na realização das tarefas e faz-se munir do material indispensável<br>• Cumprimento de regras;<br>• Trabalhos de casa<br>• Pontualidade/assiduidade</td><td>17 tempos</td></tr>
</table>

Tabela 3 – Planificação da Unidade Didática da Trigonometria

<table>
<tr><th colspan="5">PLANIFICAÇÃO - TRIGONOMETRIA DO TRIÂNGULO RETÂNGULO</th></tr>
<tr><th>Conteúdos</th><th>Objetivos - Programa e Metas curriculares</th><th>Tarefas/Recursos</th><th>Modo de trabalho</th><th>Tempos Previstos (45min)</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Razões trigonométricas de ângulos agudos</td><td rowspan="3">1. Construir, dado um ângulo agudo $\theta$, triângulos retângulos dos quais $\theta$ é um dos ângulos internos, traçando perpendiculares de um ponto qualquer, distinto do vértice, de um dos lados de $\theta$ para o outro lado, provar que todos os triângulos que assim se podem construir são semelhantes e também semelhantes a qualquer triângulo retângulo que tenha um ângulo interno igual a $\theta$.<br>2. Designar, dado um ângulo agudo $\theta$ interno a um triângulo retângulo e uma unidade de comprimento, por «seno de $\theta$ » o quociente entre as medidas do comprimento do cateto oposto a $\theta$ e da hipotenusa e representá-l$sen(\theta)$ ou $sen\theta$.<br>3. Designar, dado um ângulo agudo $\theta$ interno a um triângulo retângulo e uma unidade de comprimento, por «cosseno de $\theta$ » o quociente entre as medidas do comprimento do cateto adjacente a $\theta$ e da hipotenusa e representá-lo por $cos(\theta)$ ou $cos\theta$.<br>4. Designar, dado um ângulo agudo $\theta$ interno a um triângulo retângulo e uma unidade de comprimento, por «tangente de $\theta$» o quociente entre as medidas do comprimento do cateto oposto a $\theta$ e do cateto adjacente a $\theta$ e representá-lo por $tg(\theta)\ ou\ tg\theta$ ou ainda $tan(\theta)\ tan\theta$.<br>5. Designar seno de $\theta$, cosseno de $\theta$ e tangente de $\theta$ por «razões trigonométricas» de $\theta$ .</td><td>❖ Tarefa Diagnóstico<br><br>- Manual; calculadora</td><td>• A pares</td><td>1</td></tr>
<tr><td>❖ Tarefa 1 – A semelhança nas razões<br><br>- Guião de construção no Geogebra, Computador com software Geogebra</td><td>• A pares</td><td>2</td></tr>
<tr><td>❖ Ficha de trabalho</td><td>• A pares</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6. Utilizar uma tabela ou uma calculadora para determinar o valor (exato ou aproximado) da amplitude de um ângulo agudo a partir de uma das suas razões trigonométricas.</td><td>❖ Tarefa 2 – Tabelas Trigonométricas<br>- Computador, folha de cálculo Excel, calculadora</td><td>• A pares</td><td>2</td></tr>
<tr><td>❖ Resolução das questões do manual pág. 51</td><td>• A pares</td><td>1</td></tr>
</table>

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Distâncias a pontos inacessíveis** | 7. Resolver problemas envolvendo a determinação de distâncias utilizando ângulos agudos dados e as respetivas razões trigonométricas dadas por uma máquina de calcular ou por uma tabela. | ❖ Tarefa de Investigação 3 - O Quadrante e a resolução de problemas<br>- Quadrantes, fitas métricas, máquina fotográfica<br><br>❖ Resolução das questões do manual pág. 52 | • Grupos de 4<br><br>• A Pares | 2<br><br>1 |
| **Relação entre razões trigonométricas** | 8. Provar que a soma dos quadrados do seno e do cosseno de um ângulo agudo é igual a 1 e designar este resultado por «fórmula fundamental da Trigonometria».<br>9. Provar que a tangente de um ângulo agudo é igual à razão entre os respetivos seno e cosseno.<br>10. Provar que seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno de um ângulo complementar. | ❖ Tarefa 4 – Uma Relação Curiosa<br><br>❖ Resolução das questões do manual pág.56 | • A Pares<br><br>• A pares | 2<br><br>2 |
| **Razões Trigonométricas dos ângulos agudos de $30^0$, $45^0$, $60^0$** | 11. Determinar, utilizando argumentos geométricos, as razões trigonométricas dos ângulos de $30^0, 45^0\ e\ 60^0$.<br>12. Resolver problemas envolvendo a determinação de distâncias utilizando as razões trigonométricas dos ângulos de $30^0, 45^0\ e\ 60^0$. | ❖ Tarefa 5 – As razões trigonométricas de $\mathbf{30^0, 45^0}$ e $60^0$.<br><br>❖ Resolução das questões do manual pág. 60 | • A pares<br><br>• A pares | 2<br><br>1 |

O estudo da Trigonometria inicia-se tendo por base aprendizagens realizadas anteriormente, nomeadamente a Semelhança de Triângulos e o Teorema de Pitágoras. Desta forma, para introduzir o tema da Trigonometria, foi utilizada uma tarefa diagnóstico (anexo 3) que pretendia apurar o conhecimento prévio dos alunos nos conteúdos que iriam estudar, possibilitando a deteção de lacunas que poderiam mostrar a necessidade de uma maior insistência num dado tema ou uma revisão mais aprofundada. As apresentações das tarefas que se seguem baseiam-se nos conteúdos que devem ser apreendidos no tema da Trigonometria do Triângulo Retângulo, a saber: (i) As razões Trigonométricas de ângulos agudos; (ii) Distâncias a pontos inacessíveis; (iii) Relação entre razões trigonométricas; (iv) Razões Trigonométricas dos ângulos agudos de $30^0$, $45^0$, $60^0$. Considerando a consolidação de conhecimentos um momento importante na aprendizagem dos alunos, foram desenvolvidas aulas, entre os temas introduzidos, com questões propostas que permitissem a consolidação dos conteúdos e o desenvolvimento de diferentes capacidades matemáticas.

**TAREFA 1 – A semelhança nas razões (anexo 4)**

Na tarefa 1 (Tabela 4), nas duas primeiras questões é fundamental que os grupos dos alunos construam uma figura idêntica à dada, garantindo que o segmento de reta $[AC]$ seja perpendicular ao segmento de reta $[AC]$. Com a questão 3, pretende-se que os alunos, nas questões seguintes, verifiquem os resultados pretendidos de forma mais imediata. Deve-se aproveitar esta questão para verificar que os comprimentos encontrados são um terno pitagórico. Na questão 4, os alunos ao movimentarem o ponto A, são criados, rapidamente e de forma precisa, novos triângulos retângulos semelhantes ao inicial. Os valores dos comprimentos dos lados dos triângulos e respetivos quocientes são automaticamente atualizados. Esta potencialidade do *Geogebra* liberta os alunos da execução morosa de uma cadeia de construções e cálculos. É de salientar que, apesar desta grande vantagem, os valores apresentados podem não ser os exatos. Os alunos, ao verificarem que os triângulos com ângulos correspondentes congruentes, terão razões entre as medidas dos lados correspondentes iguais, já que se tratam de triângulos semelhantes. Deverão concluir qual o critério de semelhança que lhes permite tirar esta conclusão. Ao finalizarem as alíneas 4.1 e 4.2, os alunos devem chegar facilmente à conclusão de que as razões não dependem das medidas dos lados dos triângulos.

Tabela 4 – Esquema da aula dedicada à Tarefa 1

| | |
|---|---|
| Conhecimentos prévios | Semelhança de triângulos<br>Teorema de Pitágoras |
| Objetivos específicos | Identificar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo dado, como razões obtidas a partir de elementos de um triângulo retângulo. |
| Organização | Trabalho de pares<br>Duração da Tarefa: 90 minutos<br>Apresentação da Tarefa: 5 minutos<br>Trabalho autónomo dos alunos: 45 minutos<br>Apresentação e discussão coletiva dos resultados: 30 minutos<br>Síntese final: 10 minutos |
| Objetivos Gerais | Raciocínio Matemático<br>Comunicação |
| Material | Ficha de trabalho; Guião do *Geogebra*; Computadores; Caderno diário; Lápis |

Pode acontecer que os alunos questionem se estas razões não terão dependido da amplitude do ângulo agudo, se assim for, poder-se-á construir um novo triângulo retângulo, considerando desta vez um ângulo interno agudo de amplitude diferente. Com os alunos convencidos, são introduzidas as designações das razões seno, cosseno e tangente e concluir com a generalização no quadro. A síntese das aprendizagens realizadas nesta aula, nomeadamente as fórmulas que permitem determinar as razões trigonométricas são colocadas no quadro em jeito de conclusão.

Na aula seguinte os alunos consolidam os conteúdos através da ficha de trabalho n.º 1 (anexo 10). Os principais objetivos desta ficha prendem-se com a identificação correta dos elementos do triângulo, catetos adjacente, oposto e hipotenusa, bem como, o cálculo adequado das razões trigonométricas propostas. Além disso, algumas questões servem de diagnose do conhecimento do Teorema de Pitágoras e sua manipulação algébrica. Os alunos devem também saber justificar a semelhança de triângulos nos cálculos das razões trigonométricas de dois triângulos semelhantes.

**TAREFA 2 – Tabelas Trigonométricas (anexo 5)**

Na tarefa 2 (Tabela 5), na questão 1, é importante que os alunos entendam que nem sempre é possível obter dízimas finitas no cálculo das razões trigonométricas. Para tal, devem observar que a utilização da tabela trigonométrica conduz a valores aproximados. Mediante o tipo de arredondamento nelas realizado, podem-se obter resultados ligeiramente diferentes. A questão 2 obriga os alunos a efetuar uma pequena investigação que pretende proporcionar-lhes a curiosidade pela história da Trigonometria e a sua importância na vida real para a resolução de problemas nas várias ciências. Na questão 3 os alunos terão apenas de fazer uma leitura correta da tabela que lhes foi apresentada. Na questão 4, e porque se trata de uma turma com um bom desempenho, insere-se o sistema circular definindo o radiano: *"Um radiano é a amplitude do ângulo ao centro que determina, em qualquer circunferência, um arco de comprimento igual ao seu raio."* Nesta questão, os alunos têm de observar certas regularidades dos valores das razões trigonométricas, nomeadamente o intervalo de valores em que variam as razões trigonométricas do seno e do cosseno de um ângulo agudo e a igualdade das razões seno e cosseno de ângulos complementares.

Tabela 5 – Esquema da aula dedicada à Tarefa 2

| | |
|---|---|
| Conhecimentos prévios | Identificar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo dado, como razões obtidas a partir de elementos de um triângulo retângulo. |
| Objetivos específicos | Utilizar tabelas trigonométricas para determinar as razões trigonométricas de ângulos agudos. |
| Organização | Trabalho de pares<br>Duração da Tarefa: 90 minutos<br>Apresentação da Tarefa: 5 minutos<br>Trabalho autónomo dos alunos: 40 minutos<br>Apresentação e discussão coletiva dos resultados: 15 minutos<br>Síntese final e consolidação: 30 minutos |
| Objetivos Gerais | Raciocínio Matemático<br>Comunicação |
| Material | Computadores; Folha de cálculo do Excel; Calculadora; Caderno diário; Lápis |

Pretende-se ainda explorar com os alunos as limitações da tabela trigonométrica. Para isso, coloca-se questões do tipo: "Utiliza a tabela trigonométrica que construíste e determina x, sabendo que $sen\, x = 0{,}3145$. Os alunos devem constatar que o valor 0,3145 não se encontra na tabela. Sendo 0,3090 e 0,325 os valores da tabela que se encontram mais próximos e que correspondem, respetivamente, aos ângulos de $18^0$ e $19^0$. A conclusão que se pretende que os alunos cheguem é que a amplitude para a razão apresentada está compreendida entre esses valores. Almeja-se ainda que os alunos questionem e justifiquem os diferentes valores obtidos com a utilização da calculadora. No quadro, é colocado, em síntese, o intervalo de valores que o seno e o cosseno estão compreendidos. Regista-se ainda a igualdade existente entre o seno e o cosseno de ângulos complementares.

Na aula seguinte, os alunos consolidam os conhecimentos adquiridos com a realização das questões propostas do manual (anexo 11). O objetivo desta aula prende-se com o cálculo dos valores das razões trigonométricas usando a tabela trigonométrica e/ou a calculadora e na determinação de elementos desconhecidos do triângulo retângulo.

**TAREFA 3 – *Tarefa de Investigação*: "O Quadrante e a resolução de problemas" (anexo 6)**

Na tarefa 3 (Tabela 6), para uma resolução mais rápida da tarefa, os quadrantes foram construídos por mim e levados para a aula. Durante a realização da tarefa, são também necessárias fitas métricas para determinar as distâncias a que os alunos se encontram dos objetos no momento em que fazem a medição da amplitude dos ângulos. Todo o material necessário foi levado por mim e entregue no momento da realização da tarefa. Na tabela sugerida para registar os dados da tarefa (anexo 6), os alunos devem entender a importância da coluna "Altura do observador até aos olhos", uma vez que as alturas determinadas devem sempre considerar esta medida.

Todos os elementos do grupo devem testar o quadrante e explorar a influência que a distância a que o aluno se encontra do objeto tem na medida da amplitude do ângulo determinado pelo quadrante.

Tabela 6 – Esquema da aula dedicada à Tarefa 3

| | |
|---|---|
| Conhecimentos prévios | Identificar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo dado, como razões obtidas a partir de elementos de um triângulo retângulo. |
| Objetivos específicos | Resolver problemas utilizando razões trigonométricas de ângulos agudos em contextos variados. |
| Organização | Trabalho em grupos de quatro alunos<br>Duração da Tarefa: 90 minutos<br>Apresentação da Tarefa: 5 minutos<br>Trabalho autónomo dos alunos: 45 minutos<br>Apresentação dos resultados: 20 minutos<br>Síntese final e consolidação: 20 minutos |
| Objetivos Gerais | Raciocínio Matemático<br>Comunicação<br>Resolução de problemas |
| Material | Quadrantes; Fitas métricas; Máquina Fotográfica; Ficha de trabalho; Lápis; Calculadora |

Na aula seguinte os alunos consolidam os conteúdos com a realização das questões propostas do manual (anexo 12). As questões apresentadas são situações em contexto da vida real e cujo objetivo prende-se com o cálculo de distâncias inacessíveis.

**TAREFA 4 – Uma relação curiosa (anexo 7)**

Na tarefa 4 (Tabela 7), na questão 1 é importante que os alunos verifiquem que os triângulos dados são triângulos retângulos. As questões 2 e 3, partindo de situações particulares, os alunos têm de verificar que a tangente de um certo ângulo agudo de referência é igual ao quociente entre o seno e o cosseno desse ângulo agudo e, que a soma dos quadrados do seno e do cosseno é igual a um. A questão 4 partindo de uma expressão algébrica, os alunos devem simplificá-la para qualquer valor de $\alpha$ utilizando a fórmula fundamental da trigonometria e aprendizagens realizadas anteriormente, tais como os quadrados do binómio. Ainda nesta questão é solicitado, como trabalho de casa, que os alunos utilizem o *Geogebra* para confirmar o resultado da simplificação da expressão dada. Na questão 5, tendo por base um triângulo retângulo qualquer, os alunos devem generalizar que a tangente de um ângulo agudo é igual à razão entre o seno e o cosseno, a fórmula fundamental da trigonometria e ainda a relação de igualdade existente entre o seno e o cosseno de ângulos complementares. Por fim, na questão 6 pede-se que utilizem, sem recorrer à calculadora, a fórmula fundamental da trigonometria no cálculo das razões cosseno e tangente tendo sido dado o valor da razão seno.

Tabela 7 – Esquema da aula dedicada à Tarefa 4

| | |
|---|---|
| Conhecimentos prévios | Teorema de Pitágoras<br>Identificar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo dado, como razões obtidas a partir de elementos de um triângulo retângulo. |
| Objetivos específicos | Provar que a tangente de um ângulo agudo é igual à razão entre os respetivos, seno e cosseno.<br>Provar que a soma dos quadrados do seno e do cosseno de um ângulo agudo é igual a 1 e designar este resultado por «fórmula fundamental da Trigonometria».<br>Provar que seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno de um ângulo complementar. |
| Organização | Trabalho de pares<br>Duração da Tarefa: 90 minutos<br>Apresentação da Tarefa: 5 minutos<br>Trabalho autónomo dos alunos: 45 minutos<br>Apresentação e discussão coletiva dos resultados: 30 minutos<br>Síntese final: 10 minutos |
| Objetivos Gerais | Raciocínio Matemático<br>Comunicação<br>Generalização e justificação |
| Material | Manual; Lápis; Calculadora |

A síntese das aprendizagens realizadas nesta aula, nomeadamente a fórmula fundamental da trigonometria e a fórmula que relaciona a tangente com o seno e o cosseno, são colocadas no quadro em jeito de conclusão.

Na aula seguinte os alunos consolidam os conteúdos com a realização das questões propostas do manual (anexo 13). A grande maioria das questões sugeridas, requer a utilização da fórmula fundamental da trigonometria no cálculo dos valores exatos de razões trigonométricas, conhecida uma delas. Refira-se também, que os alunos utilizam os conhecimentos adquiridos da trigonometria no cálculo de volumes e de áreas de superfície. Por fim, e alterando a ordem das questões do manual, os alunos têm de justificar que o quadrado da soma entre o seno e o cosseno de um ângulo $\alpha$ é igual à soma da unidade com o dobro do produto do seno pelo cosseno do mesmo ângulo. Para tal, o recurso à fórmula fundamental da trigonometria é essencial. Os alunos devem inclusive utilizar aprendizagens anteriormente realizadas, nomeadamente o desenvolvimento do quadrado do binómio.

**TAREFA 5 – As Razões trigonométricas dos ângulos de $30^0, 45^0\ e\ 60^0$ (anexo 8)**

Na tarefa 5 (Tabela 8), na questão 1, partindo de um quadrado de lado $a$, os alunos devem determinar o valor da diagonal em função de $a$, utilizando o Teorema de Pitágoras, e em seguida, as razões trigonométricas de $45^0$. Na questão 2, com a ajuda de um triângulo equilátero de lado $x$, os alunos determinam em primeiro lugar a altura em função de $x$, recorrendo novamente ao Teorema de Pitágoras, e logo de seguida é-lhes solicitado o cálculo das razões trigonométricas dos ângulos de $60^0$ e de $30^0$. Neste último caso, os alunos podem utilizar a igualdade existente entre o seno e o cosseno de ângulos complementares.

Tabela 8 – Esquema da aula dedicada à Tarefa 5

| | |
|---|---|
| Conhecimentos prévios | Teorema de Pitágoras<br>Identificar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo dado, como razões obtidas a partir de elementos de um triângulo retângulo<br>Propriedades dos triângulos |
| Objetivos específicos | Determinar o valor exato das razões trigonométricas dos ângulos de referência: $30^0, 45^0$ e $60^0$ |
| Organização | Trabalho de pares<br>Duração da Tarefa: 90 minutos<br>Apresentação da Tarefa: 5 minutos<br>Trabalho autónomo dos alunos: 35 minutos<br>Apresentação e discussão coletiva dos resultados: 30 minutos<br>Síntese final: 20 minutos |
| Objetivos Gerais | Raciocínio Matemático<br>Comunicação<br>Generalização e justificação |
| Material | Manual; Lápis |

Também no cálculo da tangente, dos ângulos mencionados, é expectável que os alunos utilizem diferentes estratégias. Por um lado, identifiquem a tangente com o quociente entre o cateto oposto e o cateto adjacente do ângulo de referência. Por outro lado, reconheçam a tangente como sendo o quociente entre o seno e o cosseno do ângulo a determinar, uma vez que quer o seno quer o cosseno são determinados anteriormente. Como síntese é apresentado um quadro resumo no final da aula, de modo a que os alunos possam resumir as aprendizagens realizadas.

Na aula seguinte os alunos consolidam os conteúdos com a realização das questões propostas do manual (anexo 14). Os alunos, sem o auxílio da calculadora, devem determinar áreas e perímetros de polígonos usando os valores exatos das razões trigonométricas de $30^0, 45^0$ e $60^0$.

### 3.5. Avaliação dos alunos

A avaliação é fundamental à prática educativa e inseparável desta, uma vez que é por meio dela que o professor pode acompanhar se o progresso dos seus alunos ocorre de acordo com suas expetativas ou se há necessidade de reconsiderar sua ação pedagógica. Quanto ao aluno, a avaliação permite-lhe saber como está o seu desempenho do ponto de vista do professor, bem como se existem lacunas na sua aprendizagem às quais ele precisa reconsiderar. É importante clarificar o processo da avaliação aos alunos. Ponte e Serrazina referem que:

> O que o professor valoriza nas suas práticas de avaliação, é aquilo que os alunos são induzidos também a valorizar. Por isso, faz muita diferença se o professor apenas dá atenção às respostas certas nos testes escritos, ou se valoriza de igual modo os raciocínios e processos de trabalho dos alunos, apresentados oralmente e por escrito, bem como as reflexões mais gerais destes sobre o seu trabalho (Ponte e Serrazina, 2004, p.19).

Os métodos de avaliação divergem bem como a sua classificação. Fernandes (2002) classifica-os de acordo com as estratégias e processos utilizados pelo aluno. Como base nas propostas deste autor, apresento os seguintes: “1. Observação das estratégias e processos utilizados (informalmente ou de forma estruturada); 2. Testes e outras formas de produção escrita; 3. Comunicação e questionamento oral; 4. Trabalhos práticos; e 5. Trabalho de campo/projetos (p. 70)”.

Aliando a forma como encaro a avaliação dos alunos e a apresentada pelos autores, os instrumentos de avaliação que apliquei basearam-se na observação das estratégias e processos utilizados pelos alunos no desenvolvimento das tarefas propostas, na resolução dos trabalhos práticos, na comunicação e interação oral e no teste de avaliação.

# Capítulo 4

# METODOLOGIA

Este capítulo descreve a metodologia usada neste trabalho, encontrando-se organizado em quatro secções, começando por apresentar as opções metodológicas, seguindo-se os participantes, a apresentação dos processos e instrumentos utilizados na recolha de dados e finalmente referindo a análise de dados.

## 4.1. Opções metodológicas

Neste estudo procuro identificar os recursos matemáticos e contextuais que os alunos utilizam e também conhecer como e porque é que são utilizados. Procuro igualmente compreender como é que a proposta pedagógica elaborada influencia a sua compreensão dos conceitos relacionados com o tópico da Trigonometria. Para isso, o presente trabalho representa uma investigação sobre a minha própria prática profissional e usa uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa.

Bogdan e Biklen (1994) estabelecem cinco características fundamentais da investigação qualitativa: (1) a fonte direta de dados é o ambiente natural, sendo o principal instrumento de recolha o próprio investigador; (2) os dados recolhidos são descritivos e não numéricos, tendo a forma de palavras ou imagens; (3) o investigador interessa-se sobretudo pelo processo, relegando para segundo plano os resultados; (4) a análise dos dados é feita de uma forma indutiva, não se pretendendo confirmar hipóteses prévias; e (5) compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências, assume uma importância vital. Estas características coadunam-se com o objetivo e as condições deste estudo. Os participantes na investigação são os alunos de uma turma do 9.º ano da qual sou docente pelo terceiro ano consecutivo. As observações são realizadas durante a aula, quer na sala habitual quer no exterior onde os alunos são chamados a desenvolver a *Tarefa de Investigação*.

Pela natureza do problema e pelo facto de esta proposta curricular ter sido elaborada por mim, com base na minha experiência, na bibliografia consultada e na vontade de experimentar o uso do *software* Geogebra, esta investigação incide sobre a minha prática profissional. Trata-se, segundo Ponte (2002) de um tipo de estudos que tem vindo a reforçar a sua posição como abordagem de investigação em educação. Na verdade, a escola tem vindo a exigir ao professor a habilidade de se adaptar às contínuas transformações sociais e de agir em condições marcadas por grandes assimetrias, que se revelam na experiência pessoal e escolar dos alunos. A responsabilidade do docente envolve a sua participação na elaboração do plano de trabalho da turma, em função do projeto educativo da escola, das características gerais da turma e da própria individualidade dos seus alunos. Há que ter em linha de conta que o sucesso escolar que todos os professores almejam, depende de um conjunto alargado de condições e que, por isso, deve ser visto como um percurso a fazer e não como uma meta que todos os alunos devem atingir. Naturalmente pensar em sucesso escolar, sem esquecer a dimensão formadora e social da escola, é também pensar na qualidade das aprendizagens dos alunos. A investigação sobre a prática letiva não pretende dar uma resposta definitiva para os problemas na educação nem tão pouco produzir leis.

Bem pelo contrário, como refere Ponte (2002),

> Pode contribuir fortemente para o desenvolvimento profissional dos professores implicados e o desenvolvimento organizacional das respectivas instituições, bem como gerar importante conhecimento sobre os processos educativos, útil para outros professores, para os educadores académicos e para a comunidade em geral. É um facto incontornável que os professores estão em situação privilegiada para fornecer uma visão de dentro da escola sobre as suas realidades e problemas (Ponte, 2002, p. 13).

O ensino, visto pelo prisma deste autor, é "simultaneamente uma atividade intelectual, política e de gestão de pessoas e recursos" (idem, p. 5). Por isso, o sucesso escolar dos alunos depende de uma análise e avaliação constante, pelo professor, da sua prática profissional, isto é, compreender de que modo eles pensam e o tipo de dificuldades que obstruem a sua progressão, quer sejam de ordem individual, familiar ou escolar.

## 4.2. Participantes

Este estudo, tal como já foi referido, é realizado com alunos de uma turma do 9º ano de escolaridade do Ensino Básico da Escola D. João II em Santarém, da qual sou professora há quase duas décadas. Os motivos que foram tidos em linha de conta na escolha desta turma para participar no estudo prenderam-se por um lado, por ser uma turma que leciono pelo terceiro ano consecutivo e por outro, serem alunos que, na sua maioria, têm uma participação ativa em sala de aula e demonstram alguma compreensão das mesmas. Para além disto, ao dialogar com a turma no projeto que tinha em curso, imediatamente presenciei um entusiasmo e motivação da parte dos alunos em se envolverem com o meu estudo.

### 4.2.1. Contexto escolar

O estudo é realizado com os alunos da turma B do 9.º ano da Escola Básica D. João II pertencente ao Agrupamento de Escolas Sá da Bandeira em Santarém. Trata-se de uma turma mista, isto é, na sua constituição existem elementos que estão abrangidos pelo ensino articulado do Conservatório de Música e que, por este motivo, a grande maioria do grupo turma tem-se preservado unida ao longo dos dois ciclos.

### 4.2.2. Caracterização da escola

O Agrupamento de Escolas Sá da Bandeira localiza-se na cidade de Santarém e resultou da união, em junho de 2012, da Escola Secundária com a mesma designação, atual sede, e do Agrupamento de Escolas D. João II. Totaliza um universo cuja amplitude geográfica demarca uma dispersão significativa das unidades agrupadas. Esta realidade origina a concomitância da ruralidade e da urbanidade, pelo que todos os setores económicos – primário, secundário, terciário – convergem para a caraterização socioeconómica da população contida. É de mencionar que os estabelecimentos de educação e de ensino que abrangem maior número de alunos - a Escola Secundária de Sá da Bandeira - Escola Sede -, a Escola EB2,3 D. João II, o Centro Escolar Salgueiro Maia e a Escola de S. Bento que se localizam na União de Freguesias de Santarém.

Trata-se de um agrupamento de referência para a educação de alunos cegos e com baixa visão e, na Escola Básica Salgueiro Maia funciona, desde o ano letivo de 2012-2013, uma unidade de apoio especializado para a educação de alunos com multideficiência e surdo cegueira congénita. No ano letivo de 2016-2017, a população escolar integrava 2795 crianças e alunos: 263 na educação pré-escolar (13 grupos), 662 no 1.º ciclo do ensino básico (35 turmas), 391 no 2.º ciclo (15 turmas), 644 no 3.º ciclo (25 turmas, das quais uma de um curso vocacional), 678 nos cursos científico-humanísticos do ensino secundário (25 turmas) e 157 nos cursos profissionais (seis turmas). Oferece cursos de Português para Falantes de Outras Línguas (duas turmas). Em parceria com o Conservatório de Música de Santarém, também faculta o ensino especializado da música em regime articulado para alunos do 5.º ao 12.º ano. Na escola D. João II, local onde este estudo decorreu, existiam 30 turmas do 2.º e 3.º ciclos igualmente divididas pelos dois ciclos.

Dos 248 docentes que desempenham funções no Agrupamento, 84% pertencem aos quadros e, também, apresentam uma experiência profissional correspondente a 10 ou mais anos.

### 4.2.3. Caracterização da Turma

Os alunos que participam no estudo estão inseridos numa turma do 9º ano com 29 alunos sendo 12 rapazes e 17 raparigas. À data do estudo os alunos tinham idades compreendidas ente os 14 e os 17 anos, com uma média de 15 anos (Figura 2).

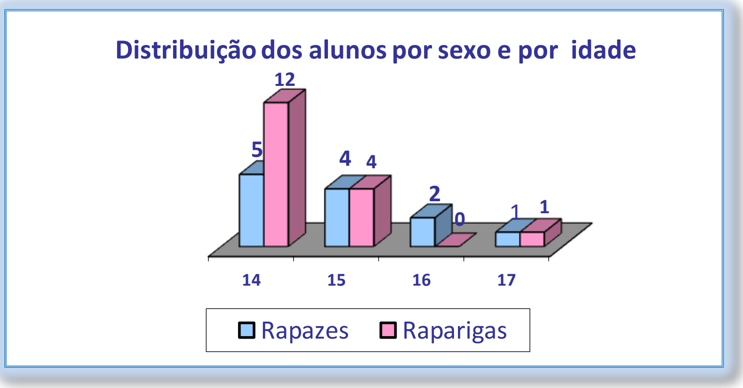



Figura 2 – Distribuição dos alunos por sexo e por idade

Relativamente ao percurso escolar, 24 alunos não têm qualquer retenção em anos anteriores e 5 alunos têm retenções, 3 dos quais no 9.º ano de escolaridade (Tabela 9).

Tabela 9 – Nº de Retenções e anos em que ocorreram

| | 1 Retenção | 2 Retenções |
|---|---|---|
| Raparigas | | 1 (6.ºano; 8.ºano) |
| Rapazes | 3 (9.ºano) | 1 (5.º ano; 8.ºano) |

Os dados mostram que a grande maioria dos alunos não têm qualquer retenção em anos letivos anteriores, pelo que a média das idades corresponde à idade habitual de frequência para o 9.º ano de escolaridade. É de referir apenas os dois alunos que ficaram retidos duas vezes e que já se encontram com 17 anos de idade.

Relativamente aos gostos académicos dos alunos, a disciplina de Matemática é indicada por um grande número de alunos como sendo a preferida, contrastando com a que os alunos apontam com mais dificuldade (Figura 3 e Figura 4).

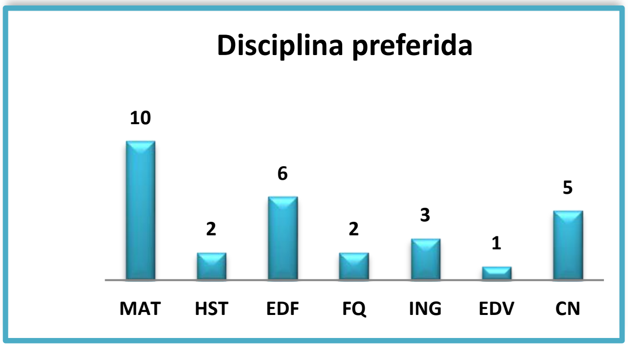



Figura 3 – Disciplina preferida dos alunos

Ainda que, não seja a maioria dos alunos a preferir a disciplina de Matemática, o número de alunos é bastante significativo tendo em conta o ano de escolaridade em que se encontram.

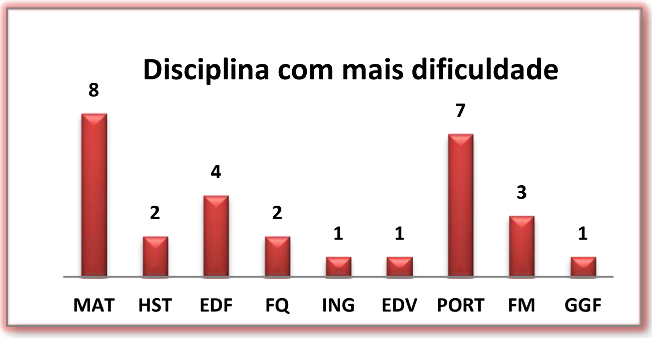



Figura 4 – Disciplina com mais dificuldade

A disciplina de Matemática também é apontada por mais alunos como sendo a que têm mais dificuldade. O carácter acumulativo das aprendizagens na disciplina e problemas ao nível da interpretação podem estar nas causas desta escolha dos alunos. O facto da disciplina de Português também ser uma das mais apontadas neste item pode fundamentar a segunda causa indicada.

No entanto, tendo em conta os resultados apresentados (Figura 5), os alunos mostram um bom desempenho, uma vez que a maioria enquadra-se nos níveis 4 e 5.

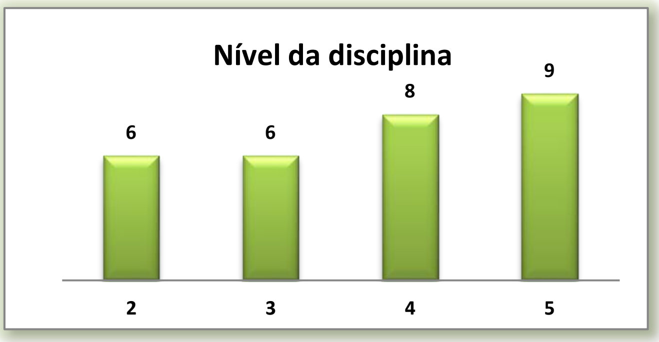



Figura 5 – Níveis na disciplina de Matemática

Refira-se que apesar do número de alunos com nível inferior a três ser significativo, o número de alunos com nível superior a três também é representativo do desempenho da turma.

A maioria dos alunos tem mostrado evidências de um bom apoio por parte dos pais que, ao longo dos três anos em que acompanho a turma, sempre se mostraram interessados e empenhados em garantir o sucesso dos seus educandos. As habilitações literárias dos pais estão acima da média (Figura 6) o que lhes tem permitido auxiliar os educandos ao longo do percurso escolar.

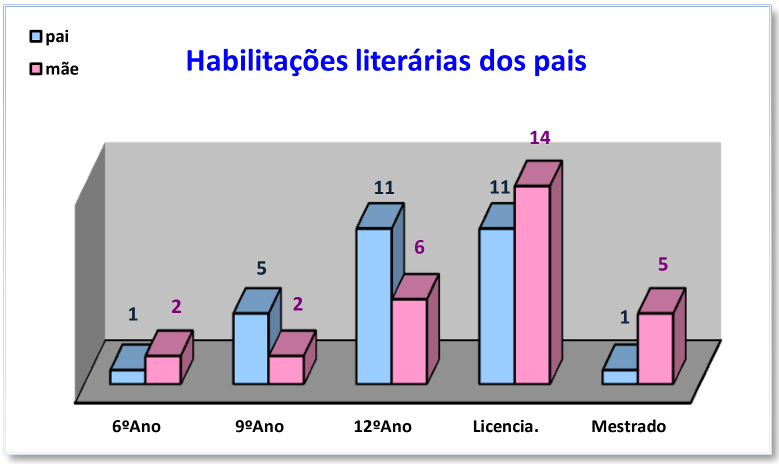



Figura 6 – Habilitações Literárias dos Pais

É de referir que a grande maioria das mães possui grau académico e são elas que na generalidade são apontadas pelos alunos que como sendo as que mais auxiliam e se interessam pelos estudos.

## 4.3. Processos e instrumentos de recolha de dados

A generalidade dos estudos qualitativos envolve mais do que uma técnica de recolha de dados (Bogdan & Biklen, 1994). Nesta investigação a recolha de dados foi feita sobretudo por mim através da observação participante. Foram também recolhidos documentos escritos, realizados pelos alunos na sala de aula bem como *prints screens* relativos às tarefas realizadas com o *software Geogebra* e no excel. Passo, de seguida, a fundamentar e descrever os métodos e instrumentos usados nesta investigação.

### 4.3.1. Observação participante

Para Adler e Adler (1994) a observação consiste em "recolher impressões do mundo que nos rodeia através de todas as capacidades humanas relevantes" (p. 378), o que, de modo geral, pressupõe uma familiaridade com o objeto da observação. A observação constitui um elemento fundamental para uma investigação com enfoque qualitativo, porque está presente desde a formulação do problema, passando pela construção das questões de investigação, recolha de dados, análise e interpretação dos dados. Com efeito, a observação desempenha um papel imprescindível para a construção de conhecimento desde o início do interesse pelo estudo do mundo natural e social e, segundo estes autores é o alicerce de muitos métodos de pesquisa.

Adler e Adler (1994) indicam ainda que a "não intervenção" tem sido uma das marcas da observação. Estes autores distinguem os "observadores" (simples observadores) dos investigadores que colocam questões ou dão tarefas aos seus sujeitos para resolver, e dos investigadores experimentais que, muitas vezes, controlam certas condições com vista a estudar a relação entre as variáveis em estudo:

> Os observadores não manipulam nem estimulam os seus sujeitos. (…) Os simples observadores seguem o curso dos acontecimentos. Os comportamentos e as interações continuam a decorrer como decorreriam sem a presença do investigador, não interrompidos pela intromissão (Adler e Adler, 1994, p. 378).

Conforme indicam Bogdan e Biklen (1994), os investigadores qualitativos "tentam agir de modo que as atividades que ocorrem na sua presença não sejam significativamente diferentes das que ocorrem na sua ausência" (p. 68), uma vez que pretendem compreender como é que os sujeitos da investigação se comportam no seu ambiente natural. No entanto, apesar de ser usualmente assumido que a observação naturalista não deve interferir com as pessoas ou atividades que estão a ser observadas, reconhece-se que a presença dos observadores afeta o que observam pois pode levar a alterações do comportamento dos indivíduos observados. Os autores referem-se a este fenómeno como "efeito do observador".

A forma como a observação é encarada depende do paradigma que é seguido e, segundo Adler e Adler (1994), a observação participante é uma das formas de observação mais reconhecida. Desenvolvida a partir da antropologia e sociologia (Lüdke & André, 1986), é uma forma de observação muito utilizada na investigação qualitativa (Flick, 2005). Trata-se, segundo Marshall e Rossman (2006), de um método de pesquisa qualitativa que pressupõe o envolvimento do observador no mundo social escolhido para o estudo, oferecendo oportunidade ao investigador de ver, ouvir e experienciar a realidade próximo do modo como os participantes o fazem.

Seguindo a mesma ótica de pensamento, Fiorentini e Lorenzato (2006) consideram a observação participante um género de estudo naturalista em que o investigador frequenta os locais onde os fenómenos surgem espontaneamente:

> A recolha de dados é realizada junto aos comportamentos naturais das pessoas quando estas estão conversando, ouvindo, trabalhando, estudando em classe, brincando, comendo (…) O termo "participante" aqui significa principalmente participação com registo de observação, procurando produzir pouca ou nenhuma interferência no ambiente de estudo (Fiorentini e Lorenzato, 2006, p. 107).

A observação participante torna possível "descrever o que está a acontecer, quem ou o que é que está envolvido, quando e onde as coisas se passaram, como é que ocorreram e porquê – pelo menos do ponto de vista dos participantes" (Jorgensen, 1989, p. 12). Este autor enumera sete características que definem a observação participante: (i) um interesse concreto no significado e na interação humana, do ponto de vista dos observados; (ii) um envolvimento nas situações da vida do dia-a-dia; (iii) uma forma de teoria e de teorizar que valoriza a interpretação e compreensão da natureza humana; (iv) uma lógica e um processo de pesquisa em aberto, que requerem flexibilidade, sentido de oportunidade e uma redefinição constante da problemática baseada nos factos observados; (v) uma abordagem e *design* de estudos de caso, qualitativos e em profundidade; (vi) o desempenho de um ou mais papéis de participante que envolve o estabelecimento e a manutenção de relações com os observados; e (vii) o uso da observação direta em conjunto com outros métodos de recolha de informação (Jorgensen, 1989, p. 14).

Neste trabalho, tendo em conta a problemática do estudo e as opções metodológicas, fui uma observadora participante. O principal instrumento de recolha de dados sou eu própria. Estive sempre presente durante a investigação, elaborando em momento posterior à observação registos escritos (diário de aula) a completar com um registo áudio-vídeo e *prints screens* das tarefas com uso do Geogebra. A utilização de um videogravador permitiu manter intacta toda a informação recolhida, facilitando a descrição detalhada dos diálogos professor-alunos e alunos-alunos. Como investigadora, procedi a diligências no sentido de "ouvir" os participantes, de modo a compreender o significado que estes atribuíam às experiências matemáticas vividas na sala de aula e as respetivas implicações nos seus raciocínios.

### 4.3.2. Recolha documental

Os diversos elementos incluídos no banco de dados da investigação tais como notas de campo, registos escritos, planificações, provas significativas como fotografias, gravações e *print screens* proporcionaram uma imensa panóplia de informações para este estudo. Ressalte-se que as notas de campo e outros registos escritos permitiram uma descrição detalhada acerca de situações e ocorrências ao longo do estudo. As fotografias e as gravações são as evidências das práticas desenvolvidas.

Uma fonte preciosa de recolha de dados é a análise de documentos, nos seus mais variados suportes, ora complementando dados fornecidos por outras fontes de prova, ora levantando novas questões a considerar (Lüdke e André, 1986). Os autores mencionam alguns aspetos a favor da análise documental. Por um lado, consideram que os documentos constituem uma fonte de informação rica e estável, podendo ser consultados repetidamente, para além de que, representam uma fonte de informações contextualizadas, fornecendo elementos sobre o contexto. Por fim, os autores mencionam o baixo custo como um fator vantajoso na utilização da análise documental.

Neste estudo, a recolha documental foi utilizada como uma técnica para obter dados que complementa a observação participante. Deste modo, foram recolhidas produções escritas significativas elaboradas pelos alunos, com o propósito de responder às questões de investigação levantadas – relatórios, registo de autoavaliação, ficheiros com os *prints screens* das tarefas com uso do Geogebra.

## 4.4. Análise de dados

A utilização da análise documental como instrumento de pesquisa contribui fortemente no processo de recolha de dados. Esta técnica pode promover o aparecimento de novos elementos relacionados com o estudo para além de complementar outras fontes de informação. A escolha dos documentos não é feita de forma casual, deve haver alguns propósitos, ideias ou hipóteses que conduzam a sua seleção.

Bodgan e Biklen (1994) referem a análise de dados como sendo “o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou" (p. 205). Estes autores recomendam ainda que alguma análise de dados seja realizada durante a recolha de dados.

Conforme indicam Lüdke e André (1986), a análise de dados envolve dois momentos: (i) a organização de todo o material, dividindo-o em categorias; e (ii) a procura de relações entre essas categorias. O primeiro momento deve ocorrer durante a fase de recolha de dados. A este propósito, Merriam (1988), refere que se o investigador não fizer uma análise permanente dos dados que vai recolhendo, ao longo da recolha de dados, corre o risco de terminar com um conjunto de dados que não possibilitam responder ao problema.

Por outro lado, Bogdan e Biklen (1994) recomendam aos investigadores permitir a existência de uma pequena fenda temporal entre o período de recolha de dados e o período de análise formal, cujo objetivo é a criação de algum afastamento relativamente ao objeto em estudo:

> Há muito a dizer quanto a não atacar o trabalho de análise imediatamente. Pode distanciar-se [o investigador] dos detalhes do trabalho de campo e ter assim a oportunidade de perspectivar as relações entre os assuntos. Ganhará um entusiasmo renovado pelos dados que se podem ter tornado, entretanto, aborrecidos. Tem, igualmente, a oportunidade de ler e de digerir novas ideias (Bogdan e Biklen, 1994 p. 220).

Estes autores previnem para os inconvenientes desta duração de tempo ser exageradamente longa, o que pode implicar na necessidade de um novo período de recolha de dados. Com o fim de evitar este tipo de situações recomendam-se vários procedimentos a ter em linha de conta: (i) delimitação progressiva do foco de estudo; (ii) formulação de questões analíticas; (iii) planificação das sessões de trabalho à luz do que foi detetado em observações anteriores; (iv) aprofundamento da revisão da literatura; (v) verificação de ideias junto dos sujeitos; e (vi) uso extensivo de comentários, observações e especulações ao longo da recolha.

Neste estudo, efetuei uma análise dos dados procurando ligações entre os dados específicos constituídos pelos diferentes materiais obtidos, numa ótica indutiva. Não tive a pretensão de provar hipóteses previamente formuladas, mas sim o objetivo de construir uma explicação. A este propósito Lüdke e André (1986) afirmam:

> A classificação e organização dos dados prepara uma fase mais complexa da análise, que ocorre à medida que o pesquisador vai reportar os seus achados (...) A categorização só por si não esgota a análise. É preciso que o investigador vá além (...) Para isso ele terá que fazer um esforço de abstracção, ultrapassando os dados, tentando estabelecer conexões e relações que possibilitem a proposição de novas explicações e interpretações (Lüdke e André, 1986, p. 49).

A análise de dados teve logo início no decorrer das aulas, uma vez que ao corrigir as produções escritas dos alunos fui registando algumas das suas estratégias de resolução e dificuldades manifestadas. Estas anotações mostraram-se relevantes para a investigação, dado que incluíam momentos das aulas onde se evidenciavam diferentes estratégias de resolução às tarefas propostas e possibilitavam recolher ideias para as observações seguintes. No entanto, a análise detalhada foi efetuada após a realização das aulas.

# Capítulo 5

# RESULTADOS

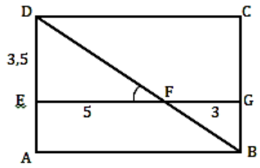
Este capítulo descreve as aulas da sequência de ensino e tem por objetivo mostrar as estratégias utilizadas e as dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução de problemas que envolvem a Trigonometria do Triângulo Retângulo. Visa também mostrar a capacidade de generalização e justificação evidenciada pelos alunos nos conceitos da Trigonometria, bem como o modo como estes desenvolvem e relacionam conceitos trigonométricos quando usam as TIC.

## 5.1. Tarefa de diagnóstico

A primeira aula dedicada ao capítulo da Trigonometria do Triângulo Retângulo iniciou-se com uma breve apresentação do tema aos alunos seguida da resolução de uma tarefa de diagnóstico. Não foi necessário muito tempo inicial para que os alunos principiassem o trabalho, pois trata-se de uma turma que conhece bem os procedimentos e regras da minha aula e, além disso, a maioria dos alunos gosta de aprender e tem uma excelente postura face ao estudo e à escola. Por se tratar de uma tarefa de diagnóstico, não foi necessária uma explicação sobre o que se pretendia. Os alunos iniciaram a sua resolução em trabalho de pares. Ao longo dos 15 minutos dados para a resolução, fui chamada aos lugares de alguns alunos para esclarecer dúvidas pontuais que se prendiam com a simbologia usada e saber se as justificações apresentadas seriam suficientes.

O objetivo da primeira parte da tarefa prendia-se com o cálculo de um ângulo desconhecido num triângulo retângulo, com a justificação da semelhança de triângulos finalizando com o cálculo de um comprimento de um lado desconhecido de um dos triângulos (Figura 7).

**1.** Na figura, está representado um retângulo [*ABCD*]. A figura não está desenhada à escala.




Sabe-se que:

- os pontos *E* e *G* pertencem aos lados [*AD*] e [*BC*], respetivamente;
- o segmento [*EG*] é paralelo ao segmento [*AB*];
- o segmento [*BD*] interseta o segmento [*EG*] no ponto *F*;

  • $\overline{EF} = 5$ cm  • $\overline{FG} = 3$ cm  • $\overline{ED} = 3{,}5$ cm

**1.1.** Admite que $D\hat{F}E = 35^o$. Qual é a amplitude, em graus, do ângulo *FBG?*

Mostra como chegaste à tua resposta.

**1.2.** Os triângulos [*EFD*] e [*GFB*] são semelhantes. Justifica.

**1.3.** Determina $\overline{BG}$. *Mostra como chegaste à tua resposta.*

Adaptado do Teste Intermédio de Matemática, 8ºano, maio2011

Figura 7 – Tarefa de diagnóstico – Questão 1.

A maior parte dos pares de alunos não demonstrou qualquer dificuldade na resolução desta tarefa por se tratar de um assunto muito trabalhado no 7.º ano. Ao percorrer a sala durante a realização da tarefa resolvi salientar a resolução do grupo de Tito e Tomás (Figura 8) que, apesar de terem demonstrado muita apatia face à Matemática desde o início do ano, pareceram motivados a participar neste estudo e prontamente tentaram resolver o que tinha sido proposto, solicitando poder expor aos colegas o que tinham feito.

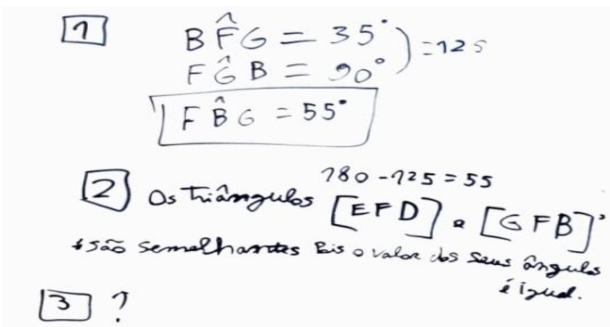



Figura 8 – Resolução de Tito e Tomás da Questão 1 - Tarefa de diagnóstico.

Pedi à turma que observasse com atenção a resolução e que colocasse aos colegas as questões que entendesse pertinentes. Teve lugar o seguinte diálogo:

**Manuel:** Porque dizes que o ângulo BFG é 35 graus?

**Tito:** Porque este é igual a este. [O aluno aponta para os ângulos DFE e BFG]

**Professora:** Sim. Mas não disseste porque são iguais.

**Tomás:** É aquilo das cruzes…

**Professora:** Sim, mas isso tem um nome que é…

**Grupo de alunos:** Ângulos verticalmente opostos.

**Professora:** Muito bem. Memorizem meninos.

**Helena:** Também não dizes porque é que o ângulo FBG é 55 graus.

Tito e Tomás tinham formulado uma estratégia que lhes permitiu obter a resposta correta, no entanto, os cálculos que apresentavam não justificavam o resultado obtido. Além disso, evidenciaram-se dificuldades dos alunos no domínio da terminologia apropriada ("aquilo das cruzes"…). Neste momento, Tomás acrescenta na resolução o valor 125 e o cálculo 180-125=55. A turma parece satisfeita com esta justificação:

**Constança:** Eu acho que podias justificar melhor a pergunta 2.

**Professora:** Pois é. Também concordo com a Constança. Que me dizem?

**Tito:** Não sabíamos o nome das cenas…

**Professora:** Mas olhem que são importantes para as justificações.

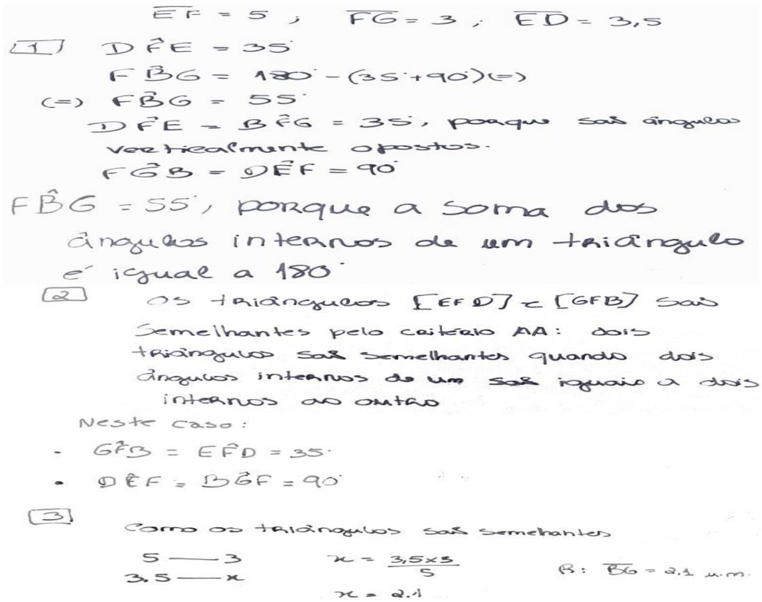
**Ana:** São os critérios AA, LLL e LAL.

**Professora:** Sabem o que a Ana está a dizer?

**Tito:** Acho que sim. AA, dois ângulos iguais… Ah pois é. É o que acontece aqui.

Relativamente à alínea 2, onde era pedida uma justificação, Tito parece indicar conhecimento da existência de critérios de semelhança, mas teve dificuldade em responder por não se lembrar do seu nome. Dada a intervenção de Ana, Tito justifica a semelhança dos triângulos pelo critério AA, tal como se pretendia como objetivo da alínea 2.

Tito e Tomás não conseguiram responder à alínea 3, por desconhecerem como usar a regra de três simples ou de proporção na situação em questão. Solicitei a Ana e Constança para registarem no quadro o que tinham feito (Figura 9), pois considerei uma das resoluções mais completas, que poderia servir para todos grupos acrescentarem o que lhes faltava na sua própria resolução:



$\overline{EF} = 5$ ; $\overline{FG} = 3$ ; $\overline{ED} = 3,5$

[1] $D\hat{F}E = 35°$

$F\hat{B}G = 180° - (35° + 90°) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F\hat{B}G = 55°$

$D\hat{F}E = B\hat{F}G = 35°$, porque são ângulos verticalmente opostos.

$F\hat{G}B = D\hat{E}F = 90°$

$F\hat{B}G = 55°$, porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°

[2] Os triângulos [EFD] e [GFB] são semelhantes pelo critério AA: dois triângulos são semelhantes quando dois ângulos internos de um são iguais a dois internos do outro

Neste caso:

- $G\hat{F}B = E\hat{F}D = 35°$
- $D\hat{E}F = B\hat{G}F = 90°$

[3] Como os triângulos são semelhantes

$5$ —— $3$

$3,5$ —— $x$

$x = \frac{3,5 \times 3}{5}$

$x = 2,1$

R: $\overline{BG} = 2,1$ u.m.

Figura 9 – Resolução de Ana e Constança da Questão 1 - Tarefa de diagnóstico.

Ana e Constança demonstraram uma excelente capacidade de justificar todas as etapas da sua resolução, usando sempre uma simbologia adequada a cada situação. É de salientar na justificação pormenorizada da alínea 2, o facto de as alunas fazerem a devida correspondência aos ângulos que são congruentes ($\mathrm{G\hat{F}B} = \mathrm{E\hat{F}D} = 35^0$ e $\mathrm{D\hat{E}F} = \mathrm{B\hat{G}F} = 90^0$). Pedi então às alunas para explicarem o seu trabalho na alínea 3:

**Professora:** Ana e Constança podem explicar porque é que usaram uma regra de três simples para determinar o comprimento do lado BG?

**Constança:** Porque os triângulos são semelhantes.

**Professora:** Sim. Isso, vocês escreveram, mas podem explicar melhor?

**Ana:** Então… (silêncio)

**Inês S.:** Posso responder?

**Professora:** Claro que sim.

**Inês S.:** Se os triângulos são semelhantes, os comprimentos dos lados são proporcionais e, por isso, pode-se usar a regra de três simples.

**Professora:** Cinco estrelas. Toda a gente entendeu?

**Manuel:** Nós também fizemos assim.

**Professora:** Sim, Manuel, eu sei. Todos os grupos que fizeram a alínea 3 resolveram com o mesmo processo. O que eu queria saber é se entenderam porque é que podem usar uma regra de três simples neste caso?

**Alguns alunos:** Sim, sim!

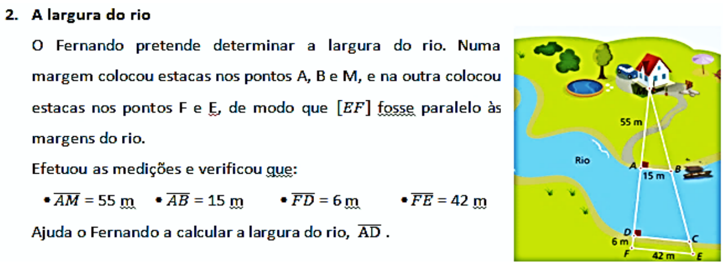
**Professora:** Tito e Tomás agora já sabem resolver?

**Tito:** Sim, Stôra.

**Tomás:** Sim.

Constatou-se pelo primeiro diálogo que Ana sabia enunciar os critérios de semelhança de triângulos. No entanto, a aluna manifestou dificuldade em justificar que, se dois triângulos são semelhantes por terem de um para o outro dois ângulos correspondentes congruentes, então os comprimentos dos lados correspondentes eram diretamente proporcionais. Inês S. veio em seu auxílio, tendo demonstrado uma boa articulação dos conhecimentos, dado que relacionou corretamente os dois critérios acima referidos.

Como a discussão desta questão se alongou e a aula era de apenas 45 minutos, decidi pedir a dois grupos que passassem a resolução da questão 2 da tarefa no quadro. Tratava-se de um problema que pretendia determinar a largura de um rio (Figura 10).



**2. A largura do rio**

O Fernando pretende determinar a largura do rio. Numa margem colocou estacas nos pontos A, B e M, e na outra colocou estacas nos pontos F e E, de modo que $[EF]$ fosse paralelo às margens do rio.

Efetuou as medições e verificou que:

• $\overline{AM} = 55$ m • $\overline{AB} = 15$ m • $\overline{FD} = 6$ m • $\overline{FE} = 42$ m

Ajuda o Fernando a calcular a largura do rio, $\overline{AD}$.



Figura 10 – Tarefa de diagnóstico – Questão 2.

O grupo de João S. e Mariana D. foi o primeiro a registar no quadro a sua resolução (Figura 11).

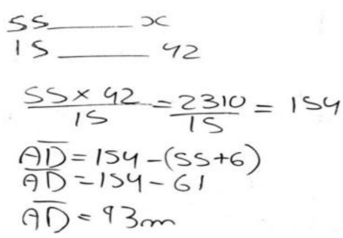




Figura 11 – Resolução de João S. e Mariana D. da Questão 2 - Tarefa de diagnóstico.

Não houve grande discussão já que quase todos os grupos tinham resolvido da mesma forma. É de salientar que apesar de não ter havido um esquema da figura apresentada, o grupo não se esqueceu de efetuar no final a diferença entre o comprimento de MF e a soma dos comprimentos de AM e DF. A generalidade dos alunos da turma pareceu ficar convencida com a resolução apresentada e ao verificarem o resultado obtido concluíram que tinham feito da mesma forma.

Outra resolução, diferente mas correta, foi apresentada por Matilde e Duarte (Figura 12).

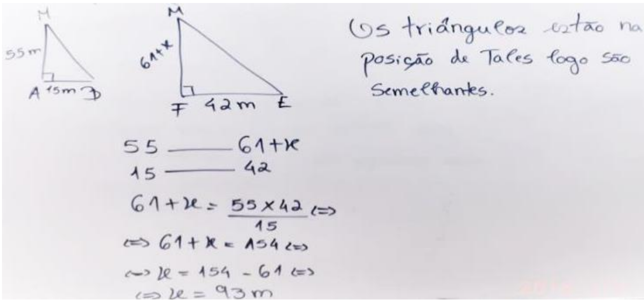



Figura 12 – Resolução de Matilde e Duarte da Questão 2 - Tarefa de diagnóstico.

A estratégia usada por este grupo, parte de um esquema onde eles colocam o que lhes é dado e o que lhes é pedido de uma forma organizada. No entanto, a diferença principal desta resolução em relação às anteriores consiste essencialmente no facto dos alunos colocarem o comprimento pretendido como uma parcela dos outros comprimentos da figura, o que permite o cálculo imediato da largura do rio. Destaca-se ainda a justificação da posição de Tales dos triângulos para se poder efetuar o raciocínio apresentado.

Pela expressão facial de alguns alunos, verifiquei que necessitavam de algumas explicações sobre a estratégia seguida pelo grupo de Matilde e Duarte, tal como se verifica pelo diálogo seguinte:

**Professora:** Então meninos percebem o que a Matilde e o Duarte fizeram?

**Miguel:** Dá-me o mesmo mas porque é que eles somaram o 61?

**Duarte:** Então porque o comprimento de lado MF é 61m mais a largura do rio que nós chamámos de x.

**Professora:** E?

**Matilde:** É a mesma coisa. Pois o João e a Mariana subtraíram no fim os 61 m e nós ficámos com eles e ao resolvermos a equação acabámos por subtraí-los.

**Miguel:** Ah, pois é.

**Duarte:** Nós preferimos assim pois não vamos esquecer de subtrair no fim…

**Manuel:** (risos…) Eu esqueci. Só quando o João e a Mariana puseram a correção no quadro é que me lembrei.

**Professora:** Sim, Manuel "*o despassarado*". Se calhar tens de começar a pensar em resolver como o Duarte e a Matilde.

**Professora:** Estão todos de parabéns. Não quero acabar a aula sem destacar o assunto mais importante discutido hoje que é…

**Grupo de alunos:** Triângulos semelhantes.

**Professora:** Bravo. Lembrem-se de escrever o sumário. Portem-se bem e até amanhã.

Perante a pergunta de Miguel, Duarte assinalou uma informação dada no enunciado, bem como o valor desconhecido (a largura do rio). Pareceu-me que a explicação estava ainda incompleta e pedi aos alunos para continuarem, pelo que Matilde explicou que o valor conhecido do lado triângulo podia ser retirado no fim, obtendo-se a largura do rio. O diálogo concluiu-se com uma reflexão sobre as vantagens desta estratégia em relação à anterior, sobretudo no facto de os alunos terem esquematizado a situação e determinarem a largura do rio como uma parcela da proporção proposta, garantindo a subtração dos 61 metros ao comprimento de $\overline{MF}$ e evitando correr o risco de não a efetuarem.

*Análise*. O balanço da aula foi positivo. Os alunos participaram ativamente, quer durante a resolução a pares quer na discussão coletiva. A heterogeneidade dos alunos quanto ao rendimento escolar e a sua ligação interpessoal favoreceram a cooperação entre eles. Os alunos com mais dificuldade não se coibiram de expor as suas dúvidas aos seus colegas e estes ajudaram da melhor forma que podiam. Esta ligação entre os alunos refletiu-se também nas discussões coletivas. As resoluções apresentadas e as discussões que ocorreram mostraram que os alunos tinham um bom conhecimento dos critérios de semelhança de triângulos e, como tal, não manifestaram grandes dúvidas sobre este assunto necessário para a introdução do tema da Trigonometria do Triângulo Retângulo. Ao longo da resolução das questões da ficha, os alunos manifestaram segurança no cálculo do ângulo desconhecido num triângulo retângulo e na justificação de que os triângulos são semelhantes por se encontrarem na posição de Tales, fundamentando assim os cálculos a realizar. Além disso, os alunos justificaram adequadamente a semelhança de diversos triângulos, aplicando os critérios de semelhança. No entanto, surgiu a dificuldade de usar as propriedades das semelhanças para determinar os comprimentos dos lados correspondentes dos triângulos.

### 5.2. Tarefa 1 - Semelhança nas razões

O início da aula foi um pouco atribulado, devido a um imprevisto com um computador. Os alunos encontravam-se em pares, segundo a planta normal da sala, mas verificou-se que um dos computadores portáteis não permitia o uso do *software Geogebra,* apesar de ter sido previamente instalado. Para ultrapassar a situação, decidi distribuir os dois alunos que ficaram sem computador por outros grupos. Resolvido o problema, foi entregue a todos os alunos um guião de construção no *Geogebra* (anexo7) bem como a Tarefa 1 - Semelhança nas razões. Os alunos estavam ansiosos por começar a construir o que lhes era pedido e passaram de imediato à resolução da primeira questão da tarefa que tinha como objetivo a construção de um triângulo retângulo (Figura 13). Durante a construção fui chamada por alguns alunos para esclarecer dúvidas que se prendiam com aspetos técnicos do programa.

1. Utilizando o programa de geometria dinâmica Geogebra, constrói o triângulo rectângulo $[ABC]$. Para tal usa o guião de construção que te apresento **(1º, 2º, 3º e 4º passos do guião – Ver Anexo7).**

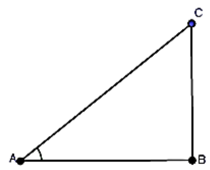



Figura 13 – Questão 1 da Tarefa 1.

A questão 2 pretendia identificar os nomes dos lados do triângulo retângulo com referência ao ângulo agudo de vértice no ponto A. Os alunos não tiveram qualquer dúvida na identificação dos catetos e da hipotenusa. Desta forma, solicitei a sua atenção e introduzi a designação de cateto oposto para o lado $[BC]$ e cateto adjacente para o lado $[AB]$. Os alunos entenderam de imediato o motivo da escolha destes nomes para os referidos catetos, tal como podemos observar pelo seguinte diálogo:

**Martina:** Agora já não precisamos de chamar cateto 1 e cateto 2 como fazíamos no teorema de Pitágoras…

**Professora:** Sim, Martina, agora cada cateto tem um nome próprio quando o relacionarmos com um certo ângulo agudo.

**Luís:** Até é fácil… Agarrado ao ângulo – adjacente, à frente – oposto.

**Professora:** Sim, Luís, se é melhor assim para memorizares.

**João S.:** Então, e se fosse ao outro ângulo agudo?

**Professora:** Pois, meninos, pensem na questão que o João está a pôr!

**João S.:** Se fosse em relação ao ângulo C, o cateto adjacente é o BC e o oposto é o AB.

**Professora:** Concordam com o João?

**Grupo de alunos:** Sim!

**Marta:** Não percebi!

**Professora:** OK, João, queres vir ao quadro desenhar o triângulo e explicar com o desenho?

(João S. vai ao quadro e esboça o triângulo $[ABC]$, aponta para o ângulo agudo com vértice em B e explica a designação dos catetos neste caso)

**Professora:** E agora já percebes melhor, Marta?

**Marta:** Sim. A hipotenusa é que é sempre a mesma.

**Professora:** Mas é claro que sim, porquê Marta?

**Marta:** Porque é sempre o lado oposto ao ângulo reto.

**Professora:** Bravo! Agora continuem a tarefa.

Era minha expetativa que os alunos percebessem que os catetos oposto e adjacente mudassem quando utilizassem como referência o outro ângulo agudo e que a hipotenusa seria sempre o lado $[AC]$. Os alunos superaram o que tinha previsto pois perceberam de imediato estas constatações sem que eu tivesse de dizer algo.

Passado este diálogo, os alunos realizaram a questão 3, composta por duas alíneas (Figura 14). A primeira pretendia apenas que os alunos observassem a existência de um terno pitagórico com os comprimentos encontrados. A segunda alínea começava a explorar as ideias relativas às razões trigonométricas.

**3.** **Utilizando as potencialidades do programa Geogebra, determina:**

**3.1.** **O comprimento dos segmentos de reta os $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$. Apresenta esses valores na zona gráfica do programa. Como se designam os comprimentos encontrados relativamente ao triângulo retângulo? Explica o teu raciocínio.**

**3.2.** **Os seguintes quocientes, apresentando os resultados na zona gráfica do programa:**

| | | |
|---|---|---|
| **3.2.1.** $\frac{BC}{AC}$ | **3.2.2.** $\frac{AB}{AC}$ | **3.2.3.** $\frac{BC}{AB}$ |

**Nota: Faz *print screen* do teu ecran e "cola" a imagem num ficheiro do word. Legenda a tua imagem da seguinte forma: "Fig.1 – Questão 3.2"**

Figura 14 – Questão 3 da Tarefa 1.

A maioria dos alunos mostrou, usando a calculadora, que os comprimentos encontrados respeitavam o Teorema de Pitágoras. No entanto Martina e Gonçalo, que terminaram primeiro a resolução da primeira alínea da questão 3, alertaram que no caso deles tinham de proceder a arredondamentos para obterem uma igualdade verdadeira (Figura 15). Solicitei de imediato a atenção dos alunos e informei-os que deveriam arredondar às unidades. Esta situação ocorre devido aos arredondamentos efetuados pelo próprio *software Geogebra*.

$$4{,}36^2 = 2{,}9^2 + 3{,}26^2$$
$$19{,}0096 = 8{,}41 + 10{,}6276$$
$$19{,}0096 = 19{,}0376$$

Figura 15 - Resolução de Martina e Gonçalo da alínea 3.1 da Tarefa 1.

Seis dos treze grupos apresentaram alguma dificuldade na resolução da segunda alínea da questão 3 da tarefa, devido ao facto de não terem respeitado o que estava definido no 5.º passo do guião (anexo 7), não representando adequadamente os comprimentos dos segmentos. Como tal, optei por efetuar o 5.º passo do guião projetando a construção para que pudessem visualizar o procedimento a realizar. Ultrapassado este problema, todos os grupos conseguiram construir as razões pretendidas.

A Figura 16 mostra a resolução efetuada pelo grupo de Martina e Gonçalo. Como se pode observar, tirando o facto do sinal de igual não se encontrar ao nível do traço de fração nas duas primeiras razões, os alunos conseguiram efetuar o que se pretendia. De igual modo, os restantes grupos calcularam as razões solicitadas.

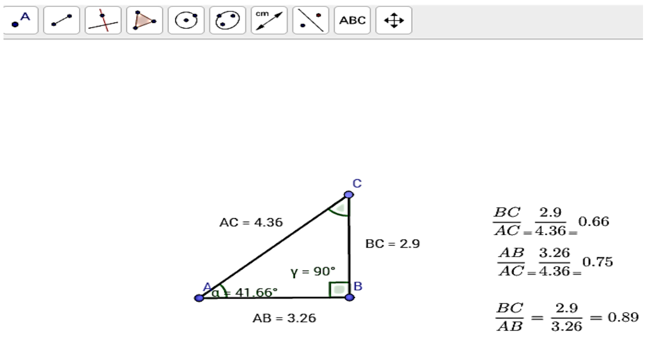
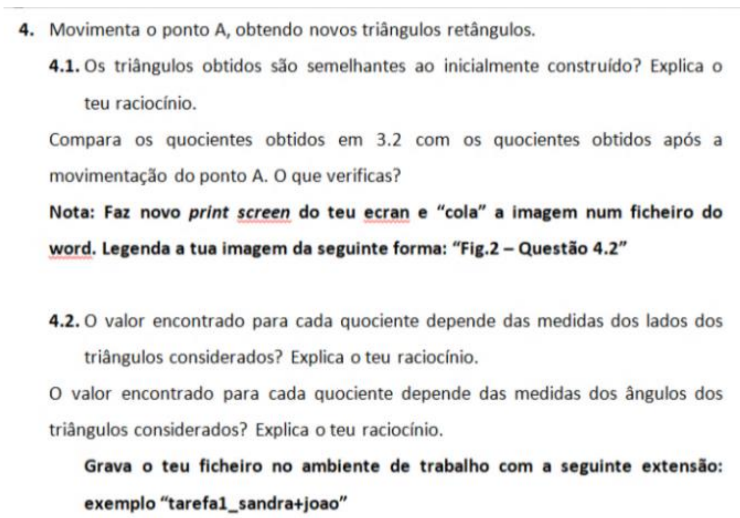



Figura 16 - Resolução de Martina e Gonçalo da alínea 3.2 da Tarefa 1.

Na questão 4 (Figura 17), os alunos tinham de deslocar o ponto A e verificar quais as alterações que ocorriam. O objetivo desta questão era que estes formulassem a conjetura que os triângulos assim construídos eram semelhantes ao original e que o valor das razões determinadas seria sempre o mesmo.



**4.** Movimenta o ponto A, obtendo novos triângulos retângulos.

**4.1.** Os triângulos obtidos são semelhantes ao inicialmente construído? Explica o teu raciocínio.

Compara os quocientes obtidos em 3.2 com os quocientes obtidos após a movimentação do ponto A. O que verificas?

**Nota: Faz novo *print screen* do teu ecran e "cola" a imagem num ficheiro do word. Legenda a tua imagem da seguinte forma: "Fig.2 – Questão 4.2"**

**4.2.** O valor encontrado para cada quociente depende das medidas dos lados dos triângulos considerados? Explica o teu raciocínio.

O valor encontrado para cada quociente depende das medidas dos ângulos dos triângulos considerados? Explica o teu raciocínio.

**Grava o teu ficheiro no ambiente de trabalho com a seguinte extensão: exemplo "tarefa1_sandra+joao"**

Figura 17 – Questão 4 da Tarefa 1.

A experiência mostrou-se bastante produtiva, pois os alunos, com entusiasmo, movimentaram inúmeras vezes o ponto A, tal como era solicitado. Deste modo, fizeram duas generalizações, concluindo, primeiro, que o valor das razões era sempre o mesmo e igual ao calculado inicialmente e ainda que os triângulos assim construídos eram semelhantes (Figura 18).

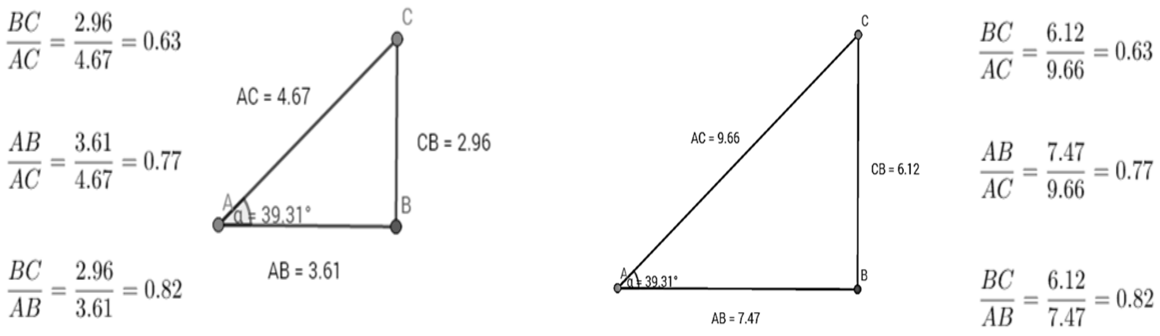



Figura 18 - Resolução de Mafalda, Helena e Mariana M. da Questão 3 da Tarefa 1.

Mafalda, Helena e Mariana M. optaram por colocar lado a lado os prints efetuados em resposta à questão 3. Desta forma, verificaram que ao movimentarem o ponto A, não existiu qualquer alteração ao valor dos quocientes solicitados desde que a amplitude dos ângulos se mantenha. Obtiveram, assim, a mesma generalização que as colegas.

Ao constatar que todos os grupos já tinham movido o ponto A, teve lugar o seguinte diálogo:

**Professora:** Meninos, por que é que os triângulos, quando movimentam o ponto A ficam semelhantes ao que construíram logo no início?

**Manuel:** Porque mantêm os ângulos.

**Miguel:** Mas os lados mudam…

**Professora:** Pois é, Miguel, mas pensa lá o que fizemos na última aula!

**Tito:** Essa, eu sei! AA.

**Professora:** Muito bem, Tito. Mas tens dizer isso melhor, o Miguel tem de perceber.

**Tito:** Não sei a frase toda, mas sei que o ângulo de 90 e o ângulo em A fica igual, por isso dois ângulos iguais, logo são semelhantes.

**Miguel:** Ai pois é, já me lembro...

**Ana:** A Inês depois disse que se os triângulos fossem semelhantes pelo critério AA, então os lados também eram proporcionais (a aluna refere-se à aula anterior).

**Professora:** Muito bem, Ana. Então podemos concluir o quê? (silêncio)

**Professora:** Vá lá, meninos, depois de movimentarmos o ponto A, o que estivemos a fazer?

**Helena:** Vimos que as razões entre os comprimentos que a professora nos mandou calcular davam sempre o mesmo.

**Professora:** Isso! Construíram muitos triângulos ao movimentar o ponto A?

**Grupo de alunos:** Bué!

**Professora:** E as razões davam sempre o mesmo?

**Grupo de alunos:** Sim!

**Miguel**: Eu fiz tantos pois achei sempre que havia de aparecer um que não desse o mesmo. Mas concluí que só mudando o ângulo é que isso acontecia.

**Professora:** E porque é que isso acontece, Miguel?

**Miguel:** Porque são semelhantes!

**Professora:** Boa! Então está na altura de darmos nome às razões calculadas!

Ao longo do diálogo pude perceber que os alunos se entusiasmaram em movimentar inúmeras vezes o ponto A e perceberam claramente que os triângulos permaneciam semelhantes ao original, uma vez que a amplitude dos ângulos se mantinha apesar dos comprimentos dos lados terem sido alterados. A intervenção de Ana no diálogo, apresenta o estabelecimento de ligações com conhecimentos anteriores e revela consideração pelo raciocínio da colega. A generalização apresentada por Helena, relativa à constância das razões dos comprimentos, indicia o entendimento do propósito da questão 4 da tarefa (Figura 19). A intervenção de Miguel, quando refere que o valor dos quocientes deixaria de ser constante se houvesse alteração da amplitude dos ângulos internos, não foi aproveitada por mim durante o diálogo, pois esta situação iria ser explorada na questão 4 e pretendia que todos os alunos pudessem chegar à mesma conclusão que Miguel.

**4.1**

Os triângulos que construímos são semelhantes. Quando mexemos o ponto A, não alteramos a amplitude dos ângulos. Logo continuamos a ter triângulos com dois ângulos iguais e pelo critério AA eles são semelhantes.

Também verificamos que quando dividimos os comprimentos que a professora disse eles vão dar sempre o mesmo nos dois triângulos porque se são semelhantes os comprimentos dos lados são proporcionais e se um aumenta o outro também aumenta na mesma proporção. Por isso dá sempre o mesmo valor.

**4.2**

O valor que encontramos não depende dos comprimentos dos lados. Mas isso só acontece se estivermos a trabalhar com triângulos semelhantes. Nós experimentamos mexer o ponto C e quando isso aconteceu o ângulo A ficou com outra amplitude e vimos logo que as razões davam outro valor.

Podemos concluir que só dão o mesmo se os triângulos forem semelhantes, isto é, se tiverem de um para o outro dois ângulos iguais. Por isso as razões dependem dos ângulos.

Figura 19 - Resolução de Mafalda, Helena e Mariana M. da Questão 4 da Tarefa 1.

Na resolução de Mafalda, Helena e Mariana M., realça-se a justificação das alunas no que respeita à razão pela qual os quocientes propostos terem dado sempre o mesmo valor. É de salientar também a generalização efetuada pelas alunas ao reconhecerem que o valor dos quocientes não depende dos comprimentos dos lados mas sim da amplitude dos ângulos.

Ao certificar-me que a maioria dos alunos tinha compreendido o que se pretendia nesta tarefa, identifiquei no quadro as razões calculadas pelos alunos com $sen \propto$, $cos \propto e\ tg \propto$ designando por $\propto$ um ângulo agudo de referência. As resoluções de todos os grupos foram gravadas no ambiente de trabalho de cada computador e arquivadas por mim no final da aula.

*Análise*. Nesta aula, os alunos mostraram alguma dificuldade inicial na utilização do *Geogebra,* em especial na construção das razões trigonométricas (5.º passo do guião). Os obstáculos que foram surgindo prenderam-se com a falta de familiaridade com este recurso tecnológico. No entanto, o uso da tecnologia permitiu prender a atenção de todos os alunos numa aula fundamental para o estudo que se iria seguir. Assim, ultrapassada a dificuldade inicial, o *software Geogebra* proporcionou aos alunos a possibilidade de construção de numerosos triângulos semelhantes ao inicial e permitiu-lhes, sem a morosidade de desenhar triângulos no papel e efetuar infindos cálculos, a compreensão do conceito de razão trigonométrica.

À exceção da dificuldade assinalada, os alunos desenvolveram um trabalho autónomo rico em termos de partilha, tanto de dúvidas como dos respetivos esclarecimentos. Nas discussões coletivas que ocorreram, os alunos ouviram, apresentaram e explicaram ideias e raciocínios aos colegas. Importa salientar que, durante a última discussão estabelecida, verificou-se alguma demora na resposta à conclusão pretendida, como indicado pelo silêncio que se seguiu à minha questão. Na análise feita *a posteriori*, entendi que o silêncio se deveu à falta de compreensão da questão e não a dificuldade nos conceitos desenvolvidos. Na verdade, após a orientação complementar, as alunas evidenciaram capacidade de generalização no que respeita à existência de um valor constante das razões trigonométricas de um dado ângulo, bem como a razão pela qual isso acontece. Através das várias experiências, movimentando apenas o ponto A do triângulo inicial, os alunos formularam a conjetura relativa à semelhança dos triângulos, comprovando a constância das razões sugeridas. Reconheceram que o valor dos quocientes não depende do valor dos comprimentos dos lados, mas sim da amplitude dos ângulos. Movimentando o ponto C, alteraram as amplitudes dos ângulos e verificaram que os triângulos nestas condições não eram semelhantes, reconhecendo de imediato que as razões não eram constantes e, como tal, dependem dos ângulos.

## 5.3. Ficha de trabalho - Razões trigonométricas

A aula teve início com alguma agitação, uma vez que a turma tinha acabado de sair de um teste de avaliação a uma outra disciplina, havendo a necessidade de uma intervenção da minha parte, no sentido de colocar a ordem necessária e criar um ambiente propício para o trabalho. Posto isto, entreguei aos alunos uma ficha de trabalho cujo intento era o de consolidar o que tinha sido trabalhado na aula anterior.

As alíneas da questão 1 (Figura 20), apesar de simples exercícios rotineiros, são relevantes na identificação correta dos catetos oposto e adjacente tendo como referência um ângulo agudo, bem como no cálculo das razões trigonométricas. Todos os alunos resolveram o que lhes era pedido sem ter havido necessidade de qualquer intervenção da minha parte, uma vez que não manifestaram qualquer dificuldade.

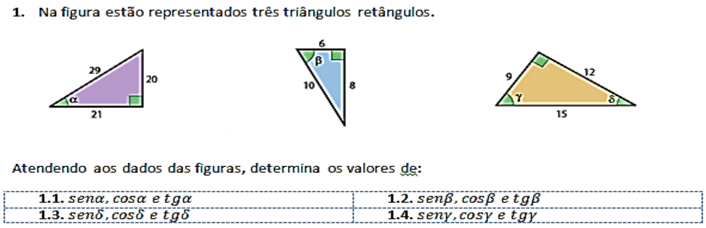



Figura 20 – Questão 1 da Ficha de trabalho.

Durante a resolução da questão 2 (Figura 21), percebi alguma insegurança por parte de alguns alunos.

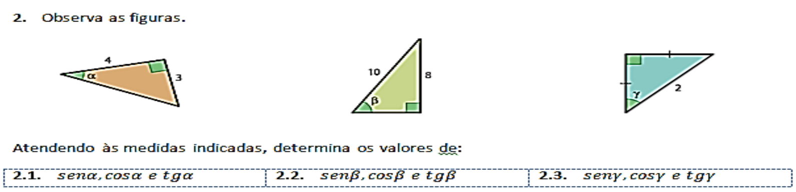



Figura 21 – Questão 2 da Ficha de trabalho.

Ao circular pela sala foram-me questionando sobre a necessidade de encontrar ou não o(s) lado(s) desconhecido(s). Teve lugar o seguinte diálogo:

**Frederico:** Stôra, na primeira pergunta temos o cateto oposto a $\alpha$ e o cateto adjacente por isso podemos calcular a tangente de $\alpha$.

**Professora:** E?

**Bárbara:** Não temos a hipotenusa para determinar o seno e o cosseno.

**Professora:** Pois não!

**Bárbara:** Não sei se existe forma de achar o seno e o cosseno sem ter de ir ao Teorema de Pitágoras.

**Professora:** Mas podes usar o Teorema de Pitágoras?

**Frederico:** Podemos!

**Professora:** Porquê?

**Duarte:** Porque são triângulos retângulos!

Os alunos não pareceram mostrar dificuldade na identificação da estratégia que poderiam utilizar para determinar a medida desconhecida. Nesta situação, necessitaram apenas de um consentimento da minha parte. A intervenção de Duarte, que se encontrava afastado deste grupo, mostra uma particularidade de alguns alunos desta turma que se prende com a atenção dedicada aos diálogos ainda que não sejam os intervenientes.

Todos os grupos, à exceção de Tito e Tomás, resolvem corretamente as três alíneas da questão 2. Tito e Tomás apenas determinam a tangente de $\alpha$ e o seno de $\beta$. Neste caso em concreto, podemos concluir que os alunos não demonstram dificuldade na aplicação dos conceitos trigonométricos, mas sim em conteúdos anteriores, nomeadamente o Teorema de Pitágoras, uma vez que para determinarem as outras razões trigonométricas necessitariam do(s) comprimento(s) desconhecido(s) e para tal teriam de recorrer ao Teorema de Pitágoras.

As produções escritas que a seguir se apresentam foram expostas por três grupos diferentes (Figura 22).

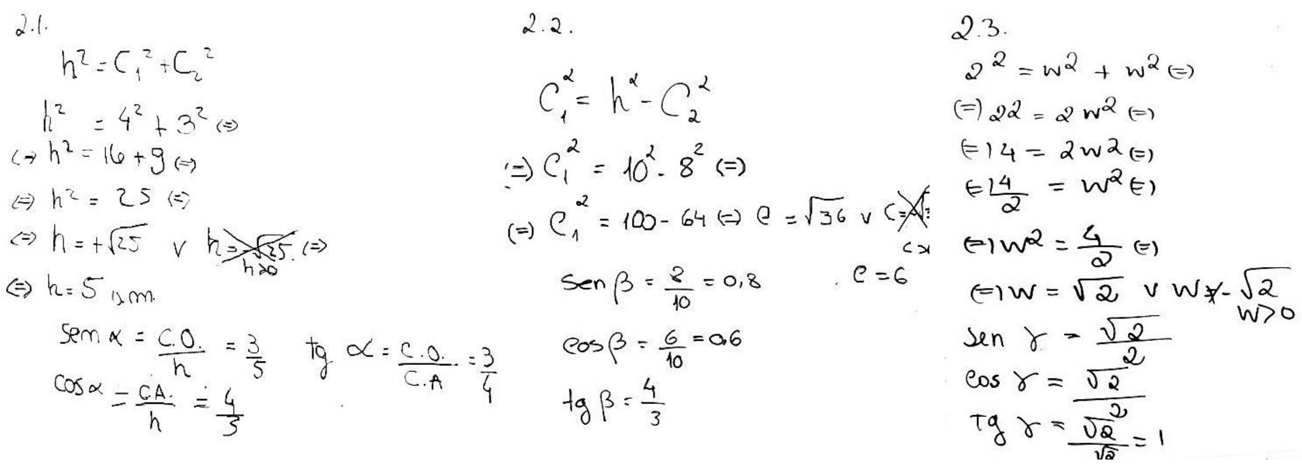



Figura 22 - Resolução de três grupos de alunos da Questão 2 da Ficha de trabalho.

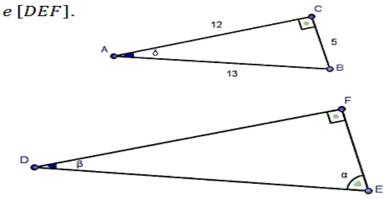
Tal como podemos observar, os alunos resolveram com correção e com rigor matemático todas as alíneas. Saliente-se a alínea 2.3 dado que se trata de um problema com um grau de dificuldade maior. Apesar disso, o grupo interpretou corretamente a figura tendo chegado à conclusão que o triângulo era isósceles e, como tal, o comprimento dos catetos, oposto e adjacente, teriam o mesmo valor.

Na questão 2, os alunos não evidenciaram dificuldades e não houve lugar a discussões. Em seguida, os alunos passaram à questão 3 (Figura 23).

**3.** Na figura estão representados os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$.
Sabe-se que:
- $D\hat{F}E = A\hat{C}B$
- $E\hat{D}F = B\hat{A}C$

**3.1.** Mostra que os triângulos são semelhantes.

**3.2.** Atendendo aos dados da figura, determina:
**3.2.1.** $sen\beta, cos\beta$ e $tg\beta$
**3.2.2.** $sen\alpha, cos\alpha$ e $tg\alpha$




**3.3.** O triângulo $[IJK]$ resultou da ampliação de razão $3 \times 10^7$ do triângulo $[ABC]$. Determina as razões trigonométricas do ângulo de menor amplitude do triângulo $[IJK]$.
Explica o teu raciocínio.

Figura 23 – Questão 3 da Ficha de trabalho.

Na primeira alínea da questão 3, todos os alunos enunciaram corretamente o critério de semelhança de triângulos que justificava o facto dos triângulos da figura serem semelhantes. Durante a resolução da segunda alínea fui chamada ao lugar de dois grupos, próximos um do outro, e teve lugar o seguinte diálogo:

**Manuel:** Stôra, como é que sabemos as razões de $\beta$ se não temos os comprimentos?

**Professora:** E precisas deles?

**Manuel:** Claro. Eu pensei que tínhamos de ter pelo menos dois comprimentos e não temos nenhum.

**Professora:** Leram bem toda a questão 3? Volta a ler, Manuel.

**Mariana D:** Nós dissemos que os triângulos eram semelhantes.

**Professora:** Pois foi!

**Manuel:** Mesmo assim eu acho que podiam ao menos dar a razão de semelhança para achar os comprimentos.

**Professora:** Tens a certeza que não existe outra forma?

**Francisco S.:** Na última aula estivemos a ver as razões de triângulos semelhantes…

**Professora:** E o que concluímos?

**Francisco S.:** Que davam o mesmo.

**Professora:** O que é que dava o mesmo?

**Manuel:** As razões!

**Professora:** Então? O que vos parece?

**Manuel:** Pois é, afinal não precisamos dos comprimentos.

**Professora:** Queres explicar melhor?

**Manuel:** Então se as razões vão dar o mesmo nos triângulos semelhantes então o seno do ângulo em A vai ser igual ao seno do ângulo em D e o seno do ângulo em B vai ser igual ao seno do ângulo em E.

Ao analisar as falas deste diálogo, concluo que Manuel percebeu claramente a questão 2 quando se refere à existência de pelo menos dois comprimentos no triângulo retângulo esquecendo de referir que poderíamos ter apenas um comprimento no caso de usarmos um triângulo isósceles. No entanto, não associou de imediato o facto de os triângulos serem semelhantes e, como tal, as razões trigonométricas teriam o mesmo valor, pois insistiu numa razão de semelhança que lhe permitisse encontrar os comprimentos dos lados. A intervenção de Francisco S. ajudou Manuel a fazer a articulação necessária com os conteúdos aprendidos na última aula e, no final, acabou por explicar claramente a resolução de toda a questão 3 quando referiu que o seno de $\delta$ seria igual ao seno de $\beta$ e ainda que o seno do ângulo CBA seria igual ao seno de $\alpha$.

Ao circular pela sala constatei que os outros grupos estavam a resolver corretamente a questão 3 e solicitei, em seguida, a um dos grupos que apresentasse a resolução da alínea 3.2.1, no quadro (Figura 24).

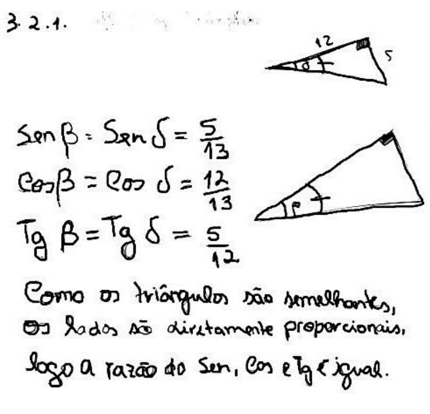



Figura 24 - Resolução de Inês S. e Miriam da alínea 3.2.1. da Ficha de trabalho.

A par com a resolução, Inês S. e Miriam optaram fazer um esquema dos triângulos, assinalaram o ângulo agudo igual e escreveram corretamente as razões trigonométricas do ângulo $\beta$ igualando-as às razões trigonométricas do ângulo $\delta$. Ainda que no enunciado não fosse pedida qualquer justificação, Inês S. e Miriam, fundamentaram as igualdades entre as razões trigonométricas de $\beta$ e de $\delta$.

A alínea 3.2.2 da questão 3 foi resolvida sem qualquer dificuldade por todos os alunos. Durante a resolução da alínea 3.3 fui chamada ao lugar do grupo de Duarte e Matilde para mediar a discussão que se estabeleceu entre eles:

**Matilde:** Stôra, eu não concordo com o Duarte.

**Professora:** Porquê?

**Matilde:** Ele foi calcular os comprimentos de $[IK]$, $[KJ]$ e $[IJ]$ e não é preciso.

**Duarte:** Mas se eu sei como se calculam posso calculá-los.

**Professora:** Pois podes.

**Matilde:** Então ele tem razão?

**Professora:** Vamos perguntar à turma.

Verificando que se tratava de duas estratégias de resolução diferentes mas corretas, solicitei a cada um dos alunos para expor as suas resoluções no quadro e confrontar a turma com os seus pontos de vista (Figuras 25 e 26).

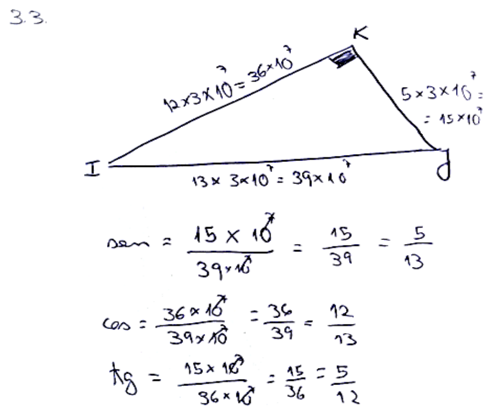



Figura 25 - Resolução de Duarte da alínea 3.3 da Ficha de trabalho.

Duarte apresenta uma estratégia correta de resolução (Figura 25) embora não tenha identificado o ângulo para o qual está a determinar as razões trigonométricas. Esta omissão não parece ser uma dificuldade mas sim um lapso de escrita.

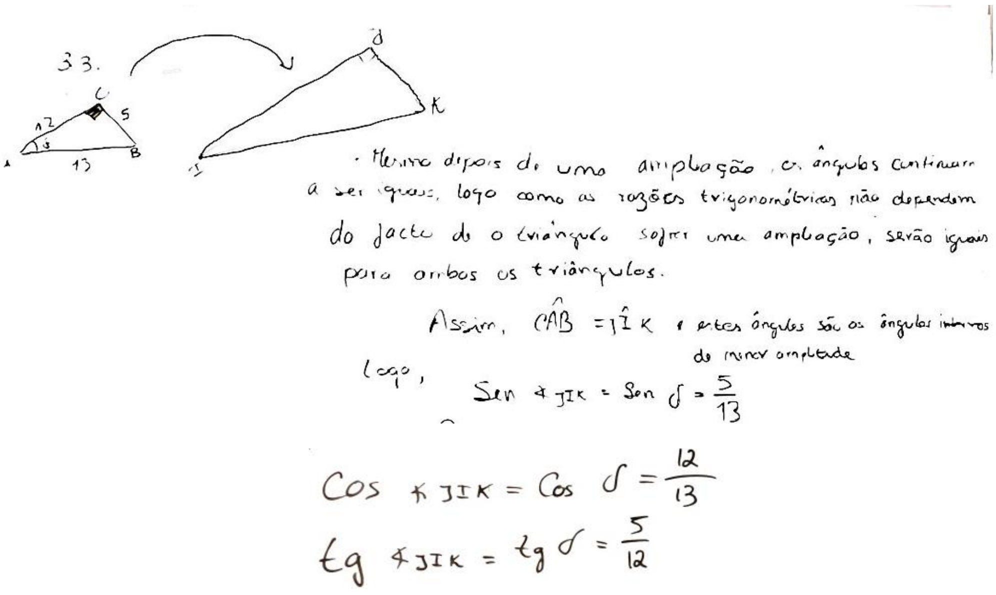



Figura 26 - Resolução de Matilde da alínea 3.3. da Ficha de trabalho.

Matilde, na sua resolução (Figura 26), justificou corretamente a semelhança dos dois triângulos, identificou a correspondência entre os ângulos de menor amplitude e aplicou as igualdades entre as respetivas razões trigonométricas.

Após a exposição das duas resoluções no quadro teve início o seguinte diálogo:

**Professora:** Meninos, no quadro estão duas resoluções diferentes para a alínea 3.3. Podem dar a vossa opinião?

**Roberta:** Eu fiz como a Matilde e penso que esta é a melhor forma de resolver a pergunta.

**Professora:** Mas a resolução do Duarte está errada?

**Manuel:** Eu fiz como o Duarte mas tirei o dez elevado a 7, deu-me uma trabalheira, mas obtive o mesmo resultado.

**Professora:** E era preciso desenvolver a notação científica, Manuel?

**Manuel:** Pois já vi que não.

**Professora:** OK. Mas estão as duas certas ou não?

**Duarte:** Agora que vi melhor a resolução que a Matilde escreveu, também concordo com a Matilde, mas a minha também está certa.

**Professora:** E os outros o que acham?

**Helena:** Estão as duas certas. Mas o Duarte não escreveu o ângulo nem no seno, nem no cosseno e nem na tangente.

**Duarte:** Pois foi, esqueci.

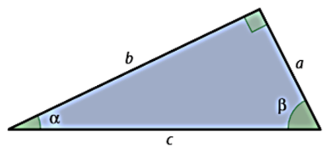
**Professora:** Muito bem, Helena. Muito bem observado. E tu Matilde o que pensas agora?

**Matilde:** As duas estão certas mas continuo a achar que é desnecessário o que o Duarte fez, já que os dois triângulos são semelhantes.

Do diálogo estabelecido pude perceber que os alunos compreenderam as estratégias apresentadas por Duarte e Matilde, havendo aceitação de cada um deles da resolução do outro. No entanto, Matilde entendeu que a sua resolução fazia mais sentido, uma vez que podia aproveitar o facto de os triângulos serem semelhantes e já saber o valor das razões trigonométricas do triângulo original antes de ser efetuada a ampliação. Saliento também a intervenção de Helena pela visão clara do que é suposto apresentar quando se solicita o valor das razões trigonométricas.

Uma vez que a discussão se prolongou mais do que eu pretendia inicialmente, solicitei aos alunos que resolvessem a questão 4 como tarefa de consolidação em casa e que passassem para a questão 5 (Figura 27).

**5.** Na figura está representado um triângulo retângulo, em que $a, b$ e $c$ designam, respetivamente, as medidas dos catetos e da hipotenusa.




Prova que o valor de $cos\alpha \times sen\beta + sen\alpha \times cos\beta = 1$

Figura 27 – Questão 5 da Ficha de trabalho.

Assim que os alunos iniciaram a resolução da questão 5 da tarefa, levantaram-se murmúrios pela sala de aula. Já era minha expetativa que tal acontecesse. No entanto, não intervim de imediato e deixei que conversassem uns com os outros. Ouviam-se comentários do tipo: “Onde estão os comprimentos?”, “Se calhar temos de usar os comprimentos de um triângulo retângulo qualquer” e “Vamos usar os comprimentos da pergunta 3”. Ao circular pela sala percebi que alguns alunos tinham encontrado estratégias diferentes para resolver a questão. Resolvi transcrever a resolução do grupo de Inês B. e de Roberta no quadro (Figura 28).

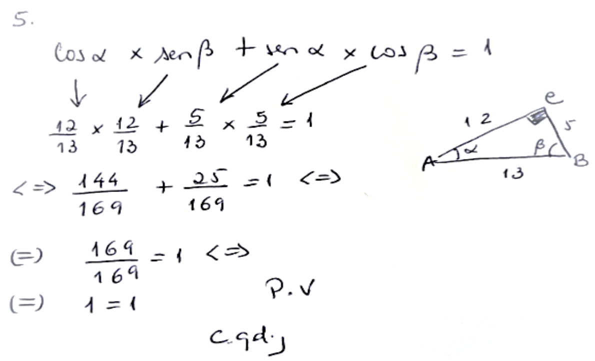



Figura 28 - Resolução de Inês B. e Roberta da Questão 5 da Ficha de trabalho.

Tal como se observa, as alunas exibiram uma linguagem matemática cuidada na apresentação mas mostraram dificuldade na justificação da igualdade usando variáveis para representar os comprimentos do triângulo retângulo, recorrendo aos comprimentos do triângulo retângulo referido na questão 3. Ao expor a resolução no quadro, a maior parte dos grupos, que tinha resolvido a questão, referiu que tinham feito da mesma forma, mas alguns usaram outros ternos pitagóricos, nomeadamente 3, 4 e 5. Ao lado resolvi acrescentar a resolução do grupo de Martina e Gonçalo (Figura 29).

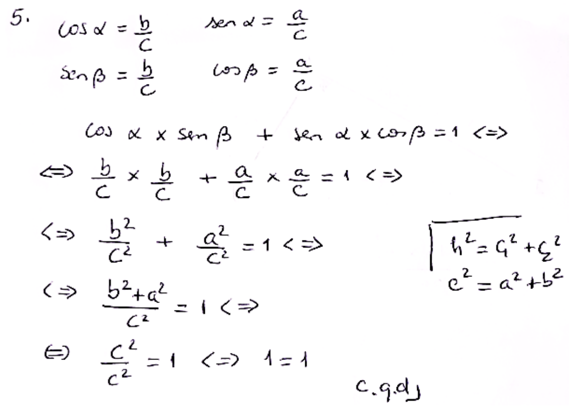



Figura 29 - Resolução de Martina e Gonçalo da Questão 5 da Ficha de trabalho.

Martina e Gonçalo apresentaram uma justificação correta e usaram uma linguagem simbólica rigorosa. É de salientar a justificação que foi colocada ao lado da resolução explicando o motivo que os levou a transformar $a^2 + b^2$ em $c^2$. Martina e Gonçalo revelaram não ter qualquer dificuldade em validar a justificação com as variáveis propostas. Também o grupo de Inês S. e Miriam resolveu a tarefa deste modo. Solicitei a estes dois grupos que se mantivessem discretos no seguinte diálogo:

**Professora:** Então o que me dizem? Estão as duas resoluções corretas?

**Frederico**: Eu fiz igual à da Inês B. e da Roberta.

**Ana:** Eu também. Mas a Martina e o Gonçalo usam apenas as letras do triângulo.

**Professora:** Pois foi. E era suposto isso acontecer?

**Ana:** Se calhar.

**Professora:** Pensem meninos. A igualdade que se pedia para justificar no vosso caso ficou válida para que valores?

**Bárbara:** No nosso caso ficou válida para o terno 3, 4 e 5. E no da Inês B. e da Roberta ficou válida para 5, 12 e 13.

**Professora:** Boa. Mas ficou válida para todos os valores possíveis que pudéssemos atribuir aos catetos e à hipotenusa?

**Manuel:** Não porque só fizemos para um terno mas se experimentássemos para muitos já ficava.

**Professora:** Quantos?

**Manuel:** Não sei bem. Muitos.

**Professora:** Concordam com o Manuel?

**João S.:** Também fiz como o Manuel mas já percebi que para ficar bem feito temos de usar as incógnitas.

**Professora:** Queres explicar melhor, João?

**João S.:** Então, as letras estão a representar todos os valores possíveis dos catetos e da hipotenusa e se usarmos as letras e substituirmos o valor das razões trigonométricas com esses valores, estamos a fazer a justificação para todos os valores.

**Professora:** Perceberam o que o João disse? E concordam com ele?

**Grupo de alunos:** Sim.

**Professora:** Muito bem eu também concordo com o João.

No diálogo que se estabeleceu não fiquei surpreendida com a posição de Manuel de querer comprovar a igualdade utilizando um grande número de ternos pitagóricos. Não foi fácil persuadir este aluno de que poderiam existir estratégias mais eficazes do que a que propunha. No entanto, a explicação elaborada por João S. pareceu convencer Manuel e os restantes alunos de que se queríamos uma justificação da igualdade para todos os triângulos retângulos teríamos de usar variáveis e não valores em concreto.

Neste diálogo não solicitei a intervenção dos alunos que tinham resolvido corretamente a questão sem que eu tivesse dado qualquer ajuda, pois tentei que todos pensassem sobre o assunto e que houvesse um diálogo mais rico para compreenderem as duas estratégias de resolução, percebendo a que estava correta do ponto de vista matemático.

*Análise*. Ao circular pela sala durante a realização da tarefa, percebi o espírito de cooperação entre os elementos dos grupos mesmo nos momentos de discordância. Os alunos, durante as discussões coletivas, procuraram entender as estratégias utilizadas pelos colegas e chegaram ao ponto de as explicar. Nesta aula, os alunos não manifestaram dificuldade no cálculo das razões trigonométricas quando são dados os comprimentos dos lados. Identificaram corretamente o cateto oposto e o cateto adjacente em relação ao ângulo agudo pretendido bem como a hipotenusa. Em questões requerendo a determinação de razões trigonométricas em triângulos com lados desconhecidos e onde se torna necessária a aplicação de conteúdos lecionados em anos anteriores, apenas dois alunos revelaram dificuldades na manipulação algébrica do Teorema de Pitágoras, pois não tinham feito esta aprendizagem no ano anterior. No entanto, a grande maioria dos alunos mostrou um desempenho bastante positivo apresentando todos os cálculos corretamente com uma linguagem matemática simbólica cuidada.

No diálogo que se estabeleceu no início da resolução da questão 3., salientou-se a necessidade de alguns alunos trabalharem com valores numéricos nos comprimentos dos lados. Os alunos demonstraram alguma resistência em apresentar cálculos sem os valores numéricos estarem fisicamente indicados na figura. No entanto, a lembrança da semelhança de triângulos e as consequências que essa semelhança acarreta no cálculo das razões trigonométricas, conduziu a maioria dos alunos a compreender que não era necessário calcular a razão de semelhança. Ainda assim, na última alínea da questão 3, a estratégia de resolução de alguns alunos consistiu no cálculo dos comprimentos dos lados, uma vez que era dada a razão de semelhança.

A questão 5 mostrou a dificuldade dos alunos em justificar igualdades usando variáveis sem recorrer a valores concretos. Nesta questão, a maioria recorreu a valores conhecidos de triângulos retângulos para comprovar a igualdade. No entanto, dois pares de alunos apresentaram uma estratégia correta na justificação da igualdade, nomeadamente usando variáveis para justificar que $cos\alpha \times sen\beta + sen\alpha \times cos\beta = 1$.

## 5.4. Tarefa 2 – Tabelas Trigonométricas

A aula teve início com a correção das alíneas da questão 4 da Ficha de trabalho – Razões trigonométricas, da tarefa proposta para casa, na aula anterior. Todos os alunos, à exceção de três, resolveram a tarefa proposta sem qualquer dificuldade. Questionados sobre o motivo de não terem resolvido o que lhes tinha solicitado, os alunos alegaram que "não tiveram tempo". De seguida, foram resolvidas, no quadro, as alíneas desta questão.

De seguida, foi entregue um computador para cada um dos grupos, bem como o enunciado da Tarefa 2 – Tabelas Trigonométricas. Na primeira questão, os alunos teriam de recorrer à calculadora para calcular valores aproximados das razões trigonométricas de um triângulo retângulo cujos comprimentos eram dados (Figura 30).

Como sabes, os valores das razões trigonométricas podem ser obtidos através do quociente entre as medidas dos diferentes lados de um triângulo retângulo. O valor desses quocientes nem sempre é uma dízima finita, o que por vezes nos leva a realizar algumas aproximações.

1. Considera o triângulo da figura, retângulo em B. Utilizando a tua calculadora, determina um valor aproximado por defeito, às centésimas, de $sen\alpha$, $cos\alpha$ e $tg\alpha$.

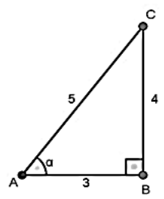



Figura 30 – Questão 1 da Tarefa 2.

Aproveitei a questão para realçar a importância da calculadora no contexto deste tema. Indiquei que cada aluno teria de conhecer a sua própria calculadora, deveria usá-la sabendo as suas limitações e, sobretudo, deveria questionar e refletir sobre os resultados que iriam obter. Os alunos efetuaram a resolução da questão sem demonstrarem qualquer dificuldade.

Em seguida, introduzi a Tabela Trigonométrica como uma ferramenta que poderia substituir a calculadora e solicitei aos alunos que efetuassem uma breve investigação sobre o seu aparecimento e importância (Figura 31).

2. Investiga um pouco acerca das tabelas trigonométricas e faz um pequeno relatório onde expliques o seu aparecimento, a sua importância no desenvolvimento da matemática e a razão para, atualmente, terem caído em desuso.

**Grava o teu ficheiro no ambiente de trabalho com a seguinte extensão: exemplo "tarefa2_sandra+joao"**

Figura 31 – Questão 2 da Tarefa 2.

O propósito desta investigação era o de estabelecer um ponto de partida para que os alunos pudessem ler, pesquisar e refletir sobre a importância da Trigonometria e das Tabelas Trigonométricas. Todos os grupos utilizaram o recurso à pesquisa na internet do que lhes era pedido (Figura 32).

- Não se pode precisar a origem da trigonometria. Como toda área da matemática, a trigonometria surgiu por diversos estudiosos, principalmente através do estudo da astronomia, agrimensura e navegação. Povos como os egípcios e os babilónios deram importantes contribuições para a descoberta e aperfeiçoamento desse ramo matemático tão importante à época, bem como em dias atuais.
- Euclides de Alexandria, na sua obra mundialmente conhecida, *Os Elementos*, apresentou alguns conceitos trigonométricos, porém representados através de formas geométricas. Mas foi Hiparco de Nicéia, na segunda metade do século II a.C., quem recebeu o título de Pai da Trigonometria, isso porque apresentou um tratado com cerca de 12 volumes nos quais tratava da trigonometria com a autoridade de quem conhecia profundamente o assunto. Naquele mesmo período, Hiparco apresentou ao mundo uma **tábua de cordas**, sendo ele o responsável pela elaboração da primeira tabela trigonométrica que se tem registo.
- Ainda naquela época, Ptolomeu apresentou sua tábua de cordas contendo o cálculo do seno dos ângulos de 0º a 90º, ângulos que seriam utilizados nos estudos astronómicos. Hiparco e Ptolomeu deram imensas contribuições para o desenvolvimento da Matemática e da Astronomia.

As tabelas trigonométricas têm caído em desuso, devido ao aumento da utilização da calculadora pois tornou tudo mais fácil.

Figura 32 – Resolução de Marta e Luís da Questão 2 da Tarefa 2.

Apesar dos alunos entenderem que efetuaram o que lhes tinha proposto, considero que o objetivo desta tarefa não foi cumprido, uma vez que os grupos se cingiram a pesquisar sem que tenha havido uma atitude reflexiva sobre a importância do que lhes estava a ser pedido. Ao percorrer a sala de aula durante a resolução da questão pude sentir as dificuldades que os alunos tiveram em selecionar e usar a informação recolhida com um olhar crítico, baseando-se em critérios rigorosos e, sobretudo, em transformar a informação em conhecimento significativo.

Na questão 3 (Figura 33), era dada uma pequena parte de uma tabela trigonométrica para os alunos se familiarizarem com a sua leitura e interpretação.

3. Na figura está representada parte de uma tabela trigonométrica. Interpreta a tabela e tenta responder às seguintes questões.
   1. Indica um valor aproximado para $tg9^0$.
   2. Indica a amplitude de um ângulo cujo cosseno seja aproximadamente 0,9877.

| Ângulo | Sen | Cos | Tg |
|---|---|---|---|
| 1º | 0,0175 | 0,9998 | 0,0175 |
| 2º | 0,0349 | 0,9994 | 0,0349 |
| 3º | 0,0523 | 0,9986 | 0,0524 |
| 4º | 0,0698 | 0,9976 | 0,0699 |
| 5º | 0,0872 | 0,9962 | 0,0875 |
| 6º | 0,1045 | 0,9945 | 0,1051 |
| 7º | 0,1219 | 0,9925 | 0,1228 |
| 8º | 0,1392 | 0,9903 | 0,1405 |
| 9º | 0,1564 | 0,9877 | 0,1584 |
| 10º | 0,1736 | 0,9848 | 0,1763 |

Figura 33 – Questão 3 da Tarefa 2.

Não existiram evidências de quaisquer dificuldades, uma vez que, ao longo do terceiro ciclo, existiram inúmeras situações em que os alunos trabalharam com tabelas de dupla entrada.

Logo de seguida, e com o auxílio de um guião, foi proposta na questão 4, a construção de uma tabela trigonométrica (Figura 34).

4. Nesta tarefa proponho-te um problema ancestral: a construção de uma tabela trigonométrica de valores naturais. Para isso, vamos utilizar a folha de cálculo.

A folha de cálculo possui as ferramentas necessárias para determinar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo: as ferramentas SEN (), COS () e TAN (). Contudo, a folha de cálculo utiliza uma medida para a amplitude dos ângulos que só irás conhecer no ensino secundário: os radianos.

Assim, para determinar as razões trigonométricas de ângulos cuja amplitude esteja em graus, temos de converter essas amplitudes para radianos. Para isso, utilizaremos a função RADIANOS.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x° | sen x | cos x | tg x | |
| 2 | 0 | | | | |
| 3 | 1 | | | | |
| 4 | 2 | | | | |
| 5 | 3 | | | | |
| 6 | 4 | | | | |
| 7 | 5 | | | | |
| 8 | 6 | | | | |
| 9 | 7 | | | | |
| 10 | 8 | | | | |
| 11 | | | | | |
| 12 | | | | | |

1º Constrói uma tabela que, na primeira linha, tenha as razões trigonométricas assinaladas e, na primeira coluna, tenha as medidas das amplitudes dos ângulos de valor inteiro (de $0^0$ a $90^0$), tal como a figura sugere.

2º Na célula B2 escreve a expressão =SEN(RADIANOS(A2)) e arrasta a célula sobre a coluna a replicar a fórmula anterior para as restantes células da coluna.

3º Repete o procedimento anterior nas células C2 e D2, mas utilizando, respectivamente, as COS e TAN: =COS(RADIANOS(A2)) e =TAN(RADIANOS(A2)).

**4º Decora a tabela a teu gosto e grava-a no ficheiro que abriste no exercício 2. Irei imprimi-la a seguir.**

Figura 34 – Questão 4 da Tarefa 2.

A folha de cálculo sugerida no guião utiliza a medida radiano para amplitude de ângulo. Desta forma, abordei o assunto explicando aos alunos que a medida que eles iriam trabalhar seria o grau, mas para a construção da tabela necessitavam da medida radiano, uma vez que a ferramenta *Excel* só trabalha com radianos. No entanto, a aprendizagem da conversão de radianos para graus e vice-versa apenas seria estudada no ensino secundário.

Enquanto os alunos estavam a construir a tabela proposta, fui circulando pela sala com o propósito de verificar as calculadoras dos alunos e efetuar alterações às definições originais de algumas, nomeadamente passar umas para radianos e outras para graus. O objetivo era confrontar os alunos, durante a discussão, para o aparecimento de resultados diferentes. Todos os grupos construíram a tabela pedida (Figura 35).

| Ângulo | Seno (sen) | Cosseno (cos) | Tangente (tg) |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,0175 | 0,9998 | 0,0175 |
| 2 | 0,0349 | 0,9994 | 0,0349 |
| 3 | 0,0523 | 0,9986 | 0,0524 |
| 4 | 0,0698 | 0,9976 | 0,0699 |
| 5 | 0,0872 | 0,9962 | 0,0875 |
| 6 | 0,1045 | 0,9945 | 0,1051 |
| 7 | 0,1219 | 0,9925 | 0,1228 |
| 8 | 0,1392 | 0,9903 | 0,1405 |
| 9 | 0,1564 | 0,9877 | 0,1584 |
| 10 | 0,1736 | 0,9848 | 0,1763 |
| 11 | 0,1908 | 0,9816 | 0,1944 |
| 12 | 0,2079 | 0,9781 | 0,2126 |
| 13 | 0,225 | 0,9744 | 0,2309 |
| 14 | 0,2419 | 0,9703 | 0,2493 |
| 15 | 0,2588 | 0,9659 | 0,2679 |
| 16 | 0,2756 | 0,9613 | 0,2867 |
| 17 | 0,2924 | 0,9563 | 0,3057 |
| 18 | 0,309 | 0,9511 | 0,3249 |
| 19 | 0,3256 | 0,9455 | 0,3443 |
| 20 | 0,342 | 0,9397 | 0,364 |
| 21 | 0,3584 | 0,9336 | 0,3839 |

Figura 35 – Fragmento da tabela construída da questão 4 de Mariana M. e João B. da Tarefa 2.

Ao constatar que não tinha havido quaisquer dúvidas, solicitei aos alunos que resolvessem a alínea 4.2. (Figura 36).

**4.2.** Utiliza a tabela trigonométrica que construíste e determina $\alpha, \beta$ e $\delta$, sabendo que:

$$sen\alpha = 0{,}3090 \quad sen\beta = 0{,}3256 \quad sen\delta = 0{,}3145.$$

Verifica os resultados obtidos com a calculadora.

Figura 36 – Alínea 4.2. da Tarefa 2.

Todos os alunos identificaram a amplitude de $\alpha = 18^0$ e de $\beta = 19^0$. No entanto, ao constatarem que o valor de $sen\delta = 0{,}3145$ não se encontrava na tabela, começou a haver uma discussão entre os pares de alunos que eu resolvi de imediato estender para toda a turma.

**Professora:** Meninos, o que se passa?

**Frederico**: Stôra, o $sen\delta = 0{,}3145$ não está na tabela?!

**Professora:** Olha pois não. Mas será que não existe?

**Ana:** Se calhar.

**Bárbara:** Eu pensei que podíamos dar uma amplitude entre $18^0$ e $19^0$ mas não sei se não temos de apresentar valores inteiros para os graus.

**Professora:** OK. Bárbara, vamos concentrar-nos na primeira parte. Porque dizes que $\delta$ poderá estar entre $18^0$ e $19^0$?

**Bárbara:** Então porque 0,3145 está entre 0,3090 e 0,3256.

**Helena:** Eu concordo com a Bárbara e disse que $\delta$ era igual a $18{,}33^0$ .

**Professora:** Mas porque é que te lembraste do $18{,}33^0$?

**Helena:** Por tentativas.

**Professora:** Tens de explicar melhor.

**Helena:** Fiz na calculadora seno de 18,1 depois o seno de 18,2 e vi que 0,3145 estava entre o seno de 18,3 e o seno de 18,4. E depois comecei a fazer seno de 18,31, a seguir seno de 18,32 e cheguei ao seno de 18,33 que é aproximadamente igual a 0,3145.

**Professora:** Espetáculo! Mas a Bárbara não tem a certeza se podemos usar valores não inteiros para os graus. O que vos parece?

**Bárbara:** Já percebi. Claro que podemos pois também são ângulos agudos e a Stôra não disse para fazermos aproximações.

**Professora:** Muito bem. Agora façam e confirmem tudo com a calculadora.

Helena utilizou uma estratégia correta e eficaz na determinação da amplitude de $\delta$. Ao constatar que $sen\delta$ estava entre $sen\,\alpha$ e $sen\,\beta$, estreitou, com o auxílio da calculadora o valor pretendido ao intervalo entre 18,3 e 18,4. Em seguida, e por tentativas, foi testando os valores de $sen\,18{,}31^0$, $sen\,18{,}32^0$, até que chegou ao resultado esperado, $sen\,18{,}33^0$. É de salientar a capacidade de justificação e de comunicação por parte de Helena dos seus raciocínios.

A minha intervenção com as calculadoras dos alunos criou a confusão pretendida:

**Manuel:** A minha calculadora pifou!

**Luís:** Olha a minha também está com um problema.

**Professora:** O que se passa?

**Manuel:** Quando calculo $sen\ 18^0$ dá-me -0,751 aproximadamente e $sen\ 19^0$ dá 0,150 e não era suposto pois escrevi tudo direitinho.

**Grupo de alunos:** Pois é.

**Professora:** Realmente não devia dar isso.

**Matilde:** A mim dá-me o que está na tabela.

**Professora:** Já percebi que alguns alunos obtiveram os resultados que estão na tabela e outros obtiveram valores diferentes. Logo, algo se passa. Quem desconfia do que se passa?

**Manuel:** A Stôra andou a ver as calculadoras e mexeu nalguma coisa!

**Professora:** Culpada. Pois foi.

**Duarte:** A mim também não me dá o que está na tabela e estive a comparar a minha calculadora com a da Matilde e está diferente.

**Professora:** Em quê?

**Matilde:** A minha tem um D e a do Duarte tem R.

**Professora:** Será que é isso que está a provocar valores diferentes? Porque será?

**Inês S:** A Stôra falou nos radianos antes da tabela. Será que o R é de radianos?

**Luís:** Então o D será de quê?

**Professora:** Boa, Inês. Luís, o D representa "*degrees*" em inglês que traduzindo para português é graus.

**Duarte:** Então está explicado. É por estarmos a usar outra medida é que dá valores diferentes. Se fizermos a mudança para *degrees* vamos obter o mesmo. Como se faz para mudar?

**Professora:** Muito bem. Espero que todos tenham percebido a importância de conhecer bem a vossa calculadora e estarem atentos aos resultados que obtêm. Eu irei ao lugar de cada um de vocês ensinar-vos a fazer as alterações necessárias. Observem bem a tabela que construíram e vejam se conseguem tirar algumas conclusões.

O objetivo da minha intervenção com as calculadoras surtiu o efeito desejado, uma vez que os alunos evidenciaram um grande espírito crítico face aos resultados obtidos quando comparados com os resultados dados pela tabela trigonométrica. É de salientar a capacidade de justificação de Duarte, na sua última intervenção, quando referiu que a calculadora em radianos deu um certo valor nas razões trigonométricas e em graus apresentou outro resultado.

**Professora:** Então o que observam na tabela?

**Constança**: Stôra, não percebo o que a professora quer que a gente observe.

**Professora:** Eu explico melhor. Queria que observassem os valores especialmente das razões seno e cosseno.

**Manuel:** Já vi uma coisa que me saltou à vista. O seno e o cosseno de $45^0$são iguais.

**Professora:** Muito bem. Vá, procurem mais.

(houve silêncio durante algum tempo)

**Francisco R.**: Não sei se é importante ou não mas os valores do seno e do cosseno são sempre zero vírgula qualquer coisa…

**Professora:** Ora aí está uma conclusão curiosa. Porque será?

**Helena:** Eu já tinha visto isso e pensei que acontece sempre assim porque quer o seno quer o cosseno é um cateto a dividir pela hipotenusa.

**Mariana M.**: Não estou a ver o que isso tem a haver. A hipotenusa é sempre maior do que qualquer cateto.

**Helena:** Por isso mesmo. Então um cateto é sempre menor do que a hipotenusa e assim a divisão dá sempre menor do que um.

**Professora:** Bravo. E o que explica o facto do seno e o cosseno de $45^0$serem iguais como disse o Manuel?

**Bárbara:** Porque o outro ângulo também é de $45^0$ e assim os catetos são iguais.

**Professora:** Eu percebi mas eu sei que consegues explicar melhor!

**Bárbara:** Então, como o triângulo é retângulo e tem um ângulo de $45^0$ o outro também é de $45^0$ porque a soma dos ângulos internos é $180^0$. Logo se tem dois ângulos iguais, tem também dois lados iguais: os catetos. Por isso é que o seno e o cosseno são iguais porque o cateto adjacente é igual ao cateto oposto.

**Professora:** Bravíssimo. Eu não diria melhor. Podemos então concluir que os valores das razões trigonométricas do seno e do cosseno de um ângulo agudo variam entre 0 e 1, exclusive.

A discussão prolongou-se mais do que tinha sido planeado mas captou a atenção da quase totalidade dos alunos e promoveu um momento importante de aprendizagem. A constatação pertinente de Manuel, quando referiu que o $sen\ 45^0$ era igual ao $cos\ 45^0$ e a de Francisco R. que referenciou os valores entre os quais estavam quer o seno quer o cosseno, permitiram a Helena e a Bárbara elaborar justificações adequadas e articular as suas justificações com os conhecimentos anteriores. Helena referiu o quociente entre os catetos e a hipotenusa para o seno e para o cosseno, mencionando que qualquer cateto tem menor comprimento do que a hipotenusa justificando, desta forma, o motivo pelo qual o seno e o cosseno de um ângulo agudo têm valores compreendidos entre zero e um exclusive. Já Bárbara aludiu às propriedades de qualquer triângulo, explicando convenientemente o facto de o triângulo ser isósceles e, como tal, os valores das razões trigonométricas do seno e do cosseno teriam de ser iguais, uma vez que os valores dos catetos oposto e adjacente também eram iguais, garantido desta forma a igualdade entre o quociente do cateto oposto pela hipotenusa e do cateto adjacente pela hipotenusa.

*Análise*. Durante a resolução da tarefa, e porque esta era muito direcionada, os alunos não mostraram dificuldade. Na discussão coletiva, observei a compreensão dos alunos do seu raciocínio e das suas ações, nomeadamente apresentando argumentos válidos para explicarem diferentes valores obtidos para as razões trigonométricas. No decorrer da aula pude constatar que os alunos não conseguiam formular estratégias para obter informação na internet de modo eficiente. Além disso, não conseguiam ir além da localização de informação e apresentavam a informação não processada, limitando-se a copiar a informação que necessitavam sem questionar a sua origem e transcrevendo parágrafos integrais. No entanto, o recurso às TIC para a construção da tabela trigonométrica, permitiu aos alunos um contacto próximo com esta tabela, proporcionando a observação de valores que possivelmente não visualizariam se a tabela lhes fosse facultada diretamente. Os alunos observaram o intervalo de valores em que variam as razões trigonométricas do seno e do cosseno de um ângulo agudo e, o que é particularmente significativo, elaboraram uma justificação correta para o facto dos valores do seno e do cosseno serem menores do que 1. O uso das TIC possibilitou aos alunos constatarem que o valor de $sen\, 45^0$ é igual ao valor de $cos\, 45^0$. Houve então uma aluna que justificou esta igualdade, fazendo referência a aprendizagens realizadas em anos anteriores, nomeadamente que num triângulo a soma dos ângulos internos é igual a $180^0$, bem como a propriedade que relaciona a amplitude dos ângulos internos com os comprimentos dos lados.

Nesta aula, a calculadora teve um papel crucial, permitindo mostrar evidência do espírito crítico dos alunos ao observarem resultados diferentes para supostas "entradas iguais". Era meu objetivo que os alunos refletissem sobre os resultados obtidos com a calculadora, de forma a realizar uma aprendizagem com significado. Os alunos perceberam que o facto de uma calculadora se encontrar em radianos e outra em graus levava a resultados diferentes e, como tal, em questões envolvendo Trigonometria deveriam ter em atenção a unidade de medida em que estavam a trabalhar. Também o conhecimento das capacidades da calculadora permitiu a Helena elaborar uma estratégia correta e eficaz, por tentativas, para determinar um ângulo sabendo o valor da razão trigonométrica.

## 5.5. Tarefa 3 – O Quadrante e a resolução de problemas

Por minha solicitação, a aula teve início um pouco mais cedo, uma vez que por se realizar no exterior, pretendia sair da sala antes de se instalar o sossego nas outras turmas, de modo a provocar o mínimo de transtorno. Após a entrega da tarefa 3, pedi a um aluno para fazer a respetiva uma leitura e dei uma breve explicação do que se iria fazer. Indiquei aos alunos que se pretendia que determinassem a altura de uma árvore à sua escolha e do edifício escolar usando a Trigonometria do triângulo retângulo. Já no exterior, organizei os alunos em seis grupos de quatro e um grupo de três, uma vez que tinham faltado duas alunas por se encontrarem a participar numa atividade da disciplina de Português. De seguida, entreguei a cada grupo um quadrante rudimentar, previamente construído por mim e uma fita métrica. Os alunos eram também portadores de material de escrita, tabela trigonométrica, calculadora e enunciado da tarefa (Figura 37).

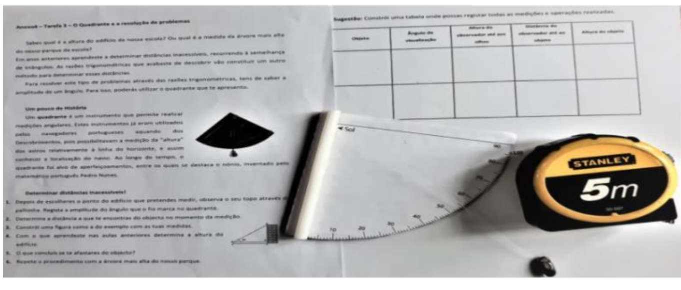



Figura 37 – Material utilizado na Tarefa 3.

O quadrante não foi uma surpresa para os alunos, uma vez que estes, na disciplina de História, tiveram conhecimento da sua existência. Expliquei como deveriam efetuar as medições com este instrumento e frisei que todos os elementos de cada grupo deveriam visualizar através do quadrante (Figura 38).

Figura 38 – Grupos em trabalho de campo na medição de alturas inacessíveis Tarefa 3.

O entusiasmo dos alunos foi notório. Todos os elementos participaram ativamente quer na medição do ângulo, quer na medição das distâncias e alturas. Efetuadas as medições necessárias, os alunos procederam à resolução da tarefa e, para isso, utilizaram os materiais e as condições físicas de que dispunham, iniciando os cálculos que lhes permitiam determinar as distâncias propostas (Figura 39).

Figura 39 – Grupos em trabalho de campo no cálculo de alturas inacessíveis Tarefa 3.

Sem qualquer intervenção da minha parte, os alunos determinaram as distâncias pretendidas (Figura 40).

Apesar de ter planificado a realização da aula totalmente no exterior, fomos obrigados a regressar à sala de aula devido às condições climatéricas.

Miriam, Joana, Tito e Tomás começaram por desenhar um esquema da situação que obtiveram, assinalando as medidas efetuadas. No cálculo $71 = \frac{6,7}{x}$ , percebi a intenção da aplicação do cosseno de $71^0$ para determinar o valor da hipotenusa. No entanto, os alunos não referiram a razão trigonométrica em questão. Para além disso, determinaram o valor de $x$ de forma errada, mostrando dificuldade na manipulação algébrica da equação.

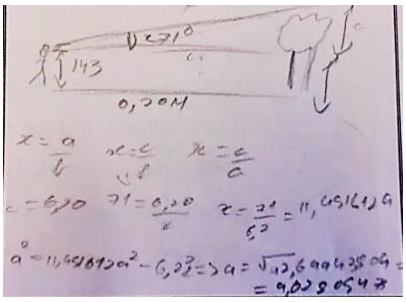


Figura 40 – Cálculo da altura da árvore escolhida por Miriam, Joana, Tito e Tomás da Tarefa 3.

Apesar de todos estes erros matemáticos, saliento a compreensão dos alunos sobre o que se pretendia calcular, uma vez que recorreram ao Teorema de Pitágoras para determinar o cateto oposto do triângulo retângulo. No final, esqueceram-se de adicionar a altura do aluno até ao nível dos olhos. Esta resolução permitiu-me concluir que embora tenha sido o primeiro problema colocado aos alunos, denotou-se a existência de dificuldades, por parte de alguns, na aplicação das razões trigonométricas na resolução de problemas. Percebi, no entanto, que a maioria dos grupos encontrou uma estratégia adequada e sem ter recorrido ao Teorema de Pitágoras determinou rapidamente o valor do cateto oposto (Figura 41).

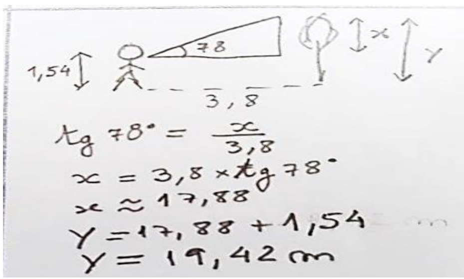



Figura 41 – Cálculo da altura da árvore escolhida por Matilde, Martina, Miguel e Gonçalo da Tarefa 3.

É importante salientar que o grupo de Miriam, Joana, Tito e Tomás e o grupo de Matilde, Martina, Miguel e Gonçalo escolheu a mesma árvore como objeto de medição.

Tal como o primeiro grupo, Matilde, Martina, Miguel e Gonçalo apresentaram um esquema correto e as respetivas medições. Em seguida, perceberam claramente que pretendiam determinar o comprimento do cateto oposto, tendo como valor conhecido o cateto adjacente, uma vez que a estratégia utilizada foi o uso da razão trigonométrica da tangente. Também não se esqueceram, no final, de adicionar a altura do observador até aos olhos. Embora não tivesse utilizado o símbolo de equivalente, este grupo demonstrou facilidade no uso dos conceitos trigonométricos na resolução do problema em causa.

Resolvi expor à turma estas duas resoluções começando por registar no quadro a resolução de Miriam, Joana, Tito e Tomás. Solicitei ao grupo que respondesse às questões que os colegas pudessem colocar.

**Professora:** Meninos o que têm a dizer sobre esta resolução?

**Roberta**: Não percebi o que eles estão a calcular.

**Joana:** Então fomos calcular a hipotenusa e depois com o Teorema de Pitágoras fomos calcular o outro cateto.

**Roberta:** Mas não percebi de onde vem o 71?

**Miriam:** É o ângulo que medimos.

**Ana:** Mas tinham de ter dito ou seno, ou cosseno ou tangente. Não podes pôr só os $71^0$.

**Professora:** Ana, neste caso qual era a correta?

**Ana:** Então tinham o cateto adjacente e foram achar a hipotenusa logo era o cosseno.

**Professora:** Muito bem Ana. Meninos, a Ana tem razão. Vocês não utilizaram nenhuma razão trigonométrica.

**Bárbara:** Também não resolveram bem a proporção.

**Professora:** Porquê?

**Bárbara:** Devia ficar ao contrário.

**Miriam:** Pois é, tá a multiplicar passa a dividir e quem está mal muda-se.

**Professora:** Tal e qual. Agora, expliquem aos vossos colegas porque é que foram usar o teorema de Pitágoras? Tito?

**Tito:** Porque queríamos o valor de um cateto e já tínhamos a hipotenusa.

**Professora:** Concordo contigo, apesar de todos os erros anteriores esta parte final está correta.

**Constança:** Stôra, mas ainda faltava um passo.

**Professora:** Qual?

**Constança:** Somarem a altura do que mediu o ângulo.

**Tito:** Pois foi, esquecemos.

A transcrição de uma resolução errada no quadro teve como objetivo mostrar aos alunos um erro que se comete com alguma frequência neste tipo de problemas, a não colocação da razão trigonométrica. Durante o diálogo estabelecido constatei a justificação correta de Ana para o facto da necessidade de utilizar o cosseno de $71^0$, uma vez que os colegas tinham a pretensão de determinar a hipotenusa. Bárbara revelou um grande poder de observação ao constatar a manipulação errada da equação $71 = \frac{6,7}{x}$. Miriam, por sua vez, entendeu de imediato o erro cometido fazendo referência a uma mnemónica utilizada para o princípio de equivalência da multiplicação. Constança encerrou o diálogo evidenciando na estratégia dos colegas a omissão da soma do comprimento do cateto oposto com a altura do observador até aos olhos.

Ao expor a estratégia seguida por Matilde, Martina, Miguel e Gonçalo (Figura 35), também solicitei aos elementos do grupo que viessem ao quadro responder às questões dos colegas:

**Professora:** Há alguém que queira colocar alguma questão?

**João S.**: Não é bem uma questão. O meu grupo escolheu outra árvore mas não usamos a tangente.

**Matilde:** Então foste achar a hipotenusa com o cosseno e depois usaste o Teorema de Pitágoras para achares o cateto oposto.

**João S.:** Certo!

**Martina:** Deram uma grande volta mas também está certo. Não é Stôra?

**Professora:** O que vos parece?

(olhei para a turma solicitando a ajuda de todos)

**Miriam:** Eu não percebi porque é que eles foram logo fazer a tangente e nós e o grupo do João fomos usar o cosseno. Acho que nunca vou saber qual a que vou usar.

**Nicole:** Eu também tenho dificuldade.

**Gonçalo:** Porque tínhamos o adjacente e queríamos o oposto.

**Professora:** Meninos, eu sei que não é só a Miriam ou a Nicole que têm dúvidas neste ponto. Vocês numa situação deste tipo terão de colocar as três questões fundamentais que eu sempre vos ensinei para resolver os problemas: "O que me dão? O que me pedem? O que posso usar para relacionar o que me dão com o que me pedem? Miguel queres ajudar-me a explicar à Miriam e à Nicole respondendo a estas questões?

**Miguel:** Então, dão-nos o cateto adjacente e o ângulo e pedem-nos o cateto oposto. Logo, das três, a que relaciona estas coisas é a tangente. Assim, vamos logo direto achar o que nos pedem.

**Miriam:** Acho que já percebi.

**Professora:** Bravo, Miguel. O treino também vos irá ajudar.

Com o auxílio deste diálogo, consegui observar que vários alunos compreenderam de imediato a razão trigonométrica que, rápida e eficazmente, lhes permitiu encontrar o valor necessário para determinar a altura da árvore. Por observação do esquema, alguns alunos constataram que a estratégia que resolveria a questão usando o menor número de cálculos, seria a aplicação da razão tangente uma vez que lhes era dado o comprimento do cateto adjacente ao ângulo agudo e pretendiam determinar o valor do cateto oposto. Isto contrastou, no entanto, com um outro grupo que mostrou dificuldade na escolha da razão trigonométrica que deveria usar. Esta dificuldade obrigou-me a recorrer a esclarecimentos adicionais que não existindo iriam prevalecer durante todo o conteúdo da Trigonometria.

Apesar da existência destas dificuldades, é de salientar a capacidade de justificação de Matilde quando expôs a estratégia elaborada pelo grupo de João S. mostrando a compreensão das várias resoluções que poderiam utilizar. Martina, por sua vez, explicou a João S. que a estratégia que o grupo deste aluno seguiu era mais trabalhosa, embora correta, demonstrando também uma boa compreensão sobre as estratégias que poderiam aplicar neste tipo de problemas. Miguel finalizou a discussão justificando o motivo pelo qual o uso da razão tangente seria o mais adequado tendo em conta que a razão trigonométrica que relacionava simultaneamente o cateto oposto com o cateto adjacente seria a tangente do ângulo observado pelos grupos. Como faltava pouco tempo para a aula terminar todos os grupos completaram a resolução da tarefa determinando a altura do edifício fundamentando-se na aprendizagem realizada com o auxílio dos diálogos estabelecidos.

Após o término desta tarefa, que coincidiu com o término da aula, as alunas ausentes regressaram e solicitaram-me uma hora em que pudessem realizar a tarefa empreendida pelos colegas. Deste modo, na hora de almoço das alunas, coincidente com a minha, foi realizada a atividade do exterior com a ajuda de vários voluntários que prontamente se ofereceram pois tinham apreciado bastante a atividade e, pretendiam efetuar outras medições dentro do recinto escolar.

*Análise.* O uso do material didático revelou-se muito importante nesta aula. A manipulação do quadrante propiciou um trabalho descontraído mas pleno no que respeita à participação ativa dos alunos. Todos quiseram efetuar medições e ocorreu até uma breve discordância, num dos grupos, sobre as medidas que iriam usar para calcular as distâncias propostas na tarefa.

Na discussão coletiva, o facto das resoluções selecionadas serem apresentadas usando um esquema e respetiva legenda, permitiu que todos os alunos seguissem os pensamentos matemáticos dos colegas e pudessem explorar as estratégias utilizadas. A estratégia seguida pelo primeiro grupo pretendia calcular a hipotenusa empregando a razão trigonométrica cosseno. No entanto, os alunos não conseguiram construir uma proporção correta, uma vez que omitiram a palavra cosseno e calcularam erradamente o valor desconhecido. A par deste erro, este grupo manifestou também dificuldade na manipulação algébrica da proporção ainda que durante o diálogo um dos elementos do grupo tenha percebido o erro cometido na má utilização do princípio de equivalência da multiplicação. Saliente-se nesta estratégia o recurso ao Teorema de Pitágoras para determinar o cateto oposto. Sobressaiu no primeiro diálogo a intervenção perspicaz e atenta de uma aluna que evidenciou este erro, justificando de imediato que ele se deveu à omissão da razão trigonométrica adequada.

Já no decorrer da segunda discussão coletiva, dois alunos mostraram evidência de capacidade de justificação das duas estratégias. Uma aluna explicou que a estratégia utilizando o cálculo da hipotenusa seguida do Teorema de Pitágoras para calcular o cateto oposto era correta embora muito fatigante. De seguida, outro aluno justificou o motivo da escolha da tangente baseando-se nas questões que eu propus. Estes alunos deram importantes contributos e conseguiram captar a atenção e a compreensão dos colegas que ainda tinham dificuldade na escolha da razão trigonométrica a usar. Tentei que a minha intervenção, no momento em que referi as três questões norteadoras da resolução de qualquer problema, fosse no sentido de ajudar os alunos com maior dificuldade a ultrapassá-las, o que foi conseguido, uma vez que os alunos mostraram entender qual a razão trigonométrica que se deve utilizar em cada situação proposta.

### 5.6. Para consolidar - Questões do manual

Informei os alunos logo no início da aula que iriam resolver as questões do manual da página 52. Pretendi verificar se os alunos tinham compreendido qual a estratégia que deveriam utilizar em cada situação proposta.

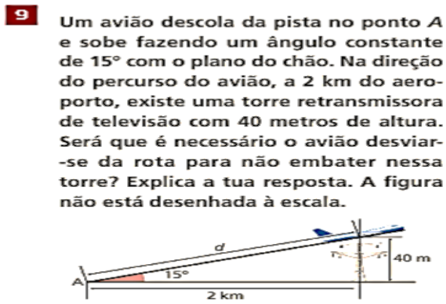

**9** Um avião descola da pista no ponto *A* e sobe fazendo um ângulo constante de 15° com o plano do chão. Na direção do percurso do avião, a 2 km do aeroporto, existe uma torre retransmissora de televisão com 40 metros de altura. Será que é necessário o avião desviar-se da rota para não embater nessa torre? Explica a tua resposta. A figura não está desenhada à escala.


Figura 42 – Questão 9 – Questões do manual.

Logo no início da resolução da questão 9 (Figura 42), percebi alguma agitação de alguns alunos. Não fiquei surpreendida pois tratava-se de uma situação em que os alunos teriam de interpretar corretamente o que lhes estava a ser solicitado, uma vez que quer no texto quer na figura, não era evidente qual a distância que se pretendia calcular. Aguardei que fossem os alunos a solicitar a minha ajuda:

**Mafalda:** Stôra, não sei o que estão a pedir.

**Professora:** Leste bem o enunciado?

**Mafalda:** Eu li. Mas a figura está a baralhar-me.

**Professora:** E se fizesses o teu próprio esquema?

**Mafalda:** Não sei se iria ajudar.

**Manuel**: Há dados a mais na figura.

**Professora**: Explica isso melhor.

**Manuel**: Então, puseram um $d$ que eu acho que não nos serve para nada e já dão a altura da torre.

**Duarte**: Aquele $d$ só está lá para baralhar. Mas eu acho que percebi.

**Professora:** Força Duarte, ajuda os teus colegas.

**Duarte:** O avião ao levantar voo faz um ângulo de$15^0$ e está a 2 km da torre que tem 40 m de altura. O que nós queremos saber é se no momento que vai passar pela torre ele tem uma altura superior a 40 m ou não.

**Professora**: Porquê?

**Duarte**: Então se for a 40 m ou menos, "esbardalha-se" contra a torre e aí precisa de mudar de rota. (risos…)

**Mafalda**: Então o que precisamos calcular é o cateto oposto e só temos de ver se dá mais ou menos do que 40 m?

**Duarte**: Sim. Eu fiz um esquema sem o $d$ e sem os 40 m e coloquei $x$ no cateto oposto.

**Professora**: Muito bem.

**Nicole**: Eu fiz direitinho mas acho que é absurdo o que me deu. Ia a 0,5 m do chão.

**Duarte**: Fizeste a tangente de $15^0$?

**Bárbara**: A calculadora está em *degrees* ou em radianos?

**Nicole**: Sim fiz! E também está em *degrees*.

**Inês S.**: Acho que já sei o que se passou com o exercício da Nicole. Deu-te $2tg15^0$ mas devias ter reduzido os quilómetros a metros, senão a resposta é em quilómetros.

**Professora**: Bravo.

Alguns alunos tinham inicialmente a mesma dúvida de Mafalda mas, ao circular pela sala após o diálogo, percebi que todos conseguiram resolver corretamente a questão. A dificuldade prendia-se simplesmente na interpretação do que era pedido sem atender a dados que se encontravam na figura, nomeadamente a variável $d.$ A intervenção de Manuel pareceu ser uma comunicação oral do que se encontrava a pensar mas impulsionou a discussão que se seguiu. Duarte explicou corretamente, numa linguagem acessível, o objetivo da questão. Mafalda ao ouvir a explicação de Duarte, percebeu claramente que a estratégia adequada era calcular o valor do cateto oposto através da tangente de $15^0$ e com isso respondia à questão. Durante a discussão surgiu ainda a dúvida de Nicole perante o resultado que tinha obtido. Para minha surpresa, o diálogo que se seguiu mostrou a capacidade de justificação de alguns alunos face ao erro da colega. Duarte entendeu que o erro poderia estar na escolha errada da razão trigonométrica. Já Bárbara pensou que a calculadora devia estar em radianos.

Perante as tentativas falhadas em encontrar o erro, de Duarte e de Bárbara, Inês S. percebeu que o erro cometido por Nicole deveu-se ao facto de não ter efetuado a redução a metros dos 2 Km ou responder em km o resultado final.

Esclarecidas todas as dúvidas, os alunos resolveram sem qualquer dificuldade as questões 9 e 10 do manual. O foco de interesse desta aula de consolidação era observar quais as estratégias que os alunos iriam aplicar na resolução da questão 11 (Figura 43).

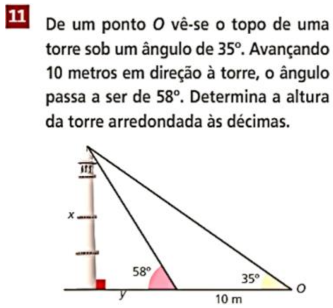



Figura 43 – Questão 11 – Questões do manual.

O objetivo da questão prendia-se na determinação da altura da torre $(x)$ e também do valor de $y$. A maioria dos alunos, habituados a esquematizar as situações propostas, começou por separar os dois triângulos retângulos e colocaram nas figuras as medidas dadas e as pretendidas. No entanto, notou-se alguma dificuldade por parte de alguns alunos. Resolvi aproximar-me e perceber qual era o motivo de não estarem a resolver a questão proposta.

**Professora:** Meninos o que se passa?

**Francisco R.:** Stôra, do triângulo pequeno temos duas incógnitas.

**Joana:** E do grande também.

**Professora:** E?

**Francisco R.:** Então se nos dessem a hipotenusa podíamos usar o seno de $58^0$ para achar o cateto oposto.

**Professora:** Pois é. Mas não dão!

**Joana:** Então como se faz?

**Professora:** Pensem um pouco! Lembrem-se do facto de termos duas incógnitas!

**Helena:** Duas incógnitas, então duas equações, sistema.

**Roberta:** Mas até podíamos ter três triângulos.

**Professora:** Pois era. Mas são os três triângulos retângulos?

**Helena:** Não! Só podemos usar o “SohCahToa” em triângulos retângulos!

**Professora:** Muito bem. Agora mãos à obra!

Através do diálogo constatei que, apesar de terem feito o esquema da figura, permaneceram algumas dificuldades nomeadamente na estratégia que deveriam optar para poder encontrar o valor das duas variáveis. A partir do momento que lembrei o facto de termos duas variáveis, Helena imediatamente associou ao sistema de duas equações, conteúdo anteriormente lecionado. Roberta ainda insistiu na existência de três triângulos mas, Helena observou que não sendo triângulos retângulos não podiam aplicar as razões trigonométricas para determinar os valores desconhecidos.

Das resoluções efetuadas pelos alunos que observei, enquanto percorri a sala de aula, resolvi destacar duas (Figuras 44 e 45).

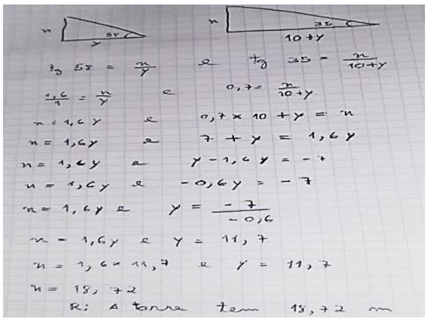


Figura 44 – Resolução de Frederico e Bárbara da Questão 11 – Questões do manual.

Na resolução de Frederico e de Bárbara, apesar de estar implícito a conjunção de duas condições, os alunos cometeram dois erros de simbologia, uma vez que não utilizaram o símbolo de equivalente nem o da conjunção. Também durante a resolução, mostraram alguma dificuldade na manipulação algébrica da segunda condição. Os alunos ao aplicarem a propriedade fundamental das proporções esqueceram-se de colocar parênteses e consequentemente, não empregaram a propriedade distributiva da multiplicação. Salientou-se também nesta resolução a utilização de valores aproximados das $tg58^0$ e $tg35^0$.

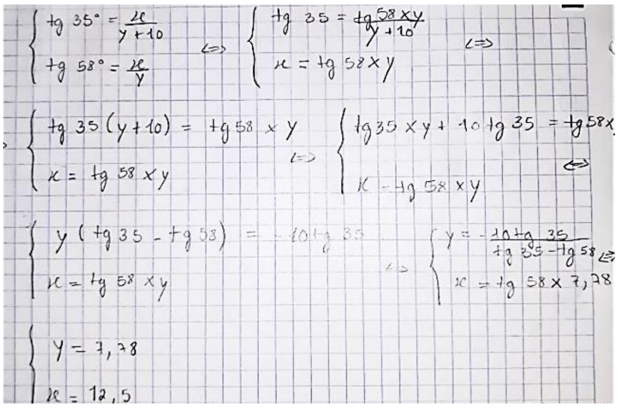


Figura 45 – Resolução de Duarte e Matilde da Questão 11 – Questões do manual.

Duarte e Matilde utilizaram corretamente a conjunção de condições através do sistema de duas equações e apesar de terem utilizado os valores exatos das tangentes, demonstraram um excelente domínio na manipulação algébrica das equações. Apesar da existência de erros na resolução de Frederico e de Bárbara, a diferença fundamental das duas resoluções prendeu-se essencialmente no uso de valores aproximados deste grupo e de valores exatos no grupo de Duarte e de Matilde. Por se tratar de uma aula de 45 minutos optei por transcrever no quadro a resolução de Duarte e de Matilde, uma vez que ainda existiam seis alunos que apesar de terem escrito o sistema de equações não o conseguiram resolver. Estes mostraram muita dificuldade na manipulação algébrica das equações.

*Análise.* Ao longo desta aula, os alunos demonstraram facilidade na escolha da razão trigonométrica que melhor se adequava às situações propostas. No entanto, uma falha de interpretação do enunciado ou a existência na figura de dados desnecessários representou para os alunos uma manifesta dificuldade e como tal foram solicitando a minha ajuda. A participação de alguns alunos na discussão coletiva, juntamente com a minha intervenção, contribuiu para esclarecimento destes aspetos.

No decorrer da primeira discussão sobressaiu a capacidade de argumentação dos alunos face a um erro. Vários alunos propuseram justificações para o resultado erróneo de uma aluna que referiu que a altura do avião no momento que passava sobre a torre era de $0{,}5\ m$. Alguns alunos referiram que a colega poderia ter resolvido a questão usando a razão trigonométrica errada. Outros indicaram a possibilidade da calculadora se encontrar em radianos em vez de graus. Sem qualquer intervenção da minha parte, uma aluna chegou à justificação correta do motivo do erro, indicando que o resultado não estava na unidade de medida adequada.

No início da resolução da questão 11, existiram algumas dúvidas aliadas ao facto de estarem duas variáveis na figura e não ter sido dado qualquer comprimento, nomeadamente o valor da hipotenusa. A minha intervenção, durante o segundo diálogo, em que relembrei a existência de duas variáveis, implicou recordar a estratégia da resolução de um sistema para equacionar o problema. Os alunos esquematizaram a situação, conseguiram colocar as igualdades pretendidas usando as tangentes dos ângulos agudos assinalados. No entanto, houve alunos que demonstraram dificuldade na manipulação algébrica das equações e, ou não resolveram, ou resolveram com erros. Esta dificuldade não se prendeu com conteúdos associados à Trigonometria mas sim com aprendizagens não consolidadas, por estes alunos, em anos anteriores.

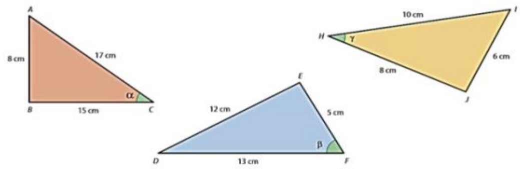
A primeira resolução apresentada ilustra a afirmação anterior. Os alunos esquematizaram corretamente a situação descrita, utilizaram as tangentes dos ângulos agudos dados mas cometeram erros de natureza algébrica ao tentarem descobrir o valor de $y$. Na segunda resolução, os alunos efetuaram os cálculos com valores exatos, o que dificultou a manipulação algébrica da equação, mas não existiram dificuldades na resolução do sistema, obtendo o valor pretendido.

Todas as considerações, justificações e estratégias utilizadas pelos alunos permitem concluir que estes demonstraram capacidade na resolução de tarefas contextualizadas na realidade propostas envolvendo Trigonometria.

## 5.7. Tarefa 4 – Uma Relação Curiosa

Após a entrega da tarefa 4, referi aos alunos que deveriam trabalhar em pares, tal como nas aulas anteriores. Solicitei, especial atenção para as questões 2 e 3 pois iriam observar relações interessantes entre as razões trigonométricas. De seguida, os alunos iniciaram a resolução da questão 1 sem demostrar qualquer dificuldade (Figura 46). Nesta questão, todos os alunos utilizaram o Teorema de Pitágoras para justificar que se tratavam de triângulos retângulos ainda que com estratégias diferentes. A maior parte utilizou o terno pitagórico e verificou a proposição verdadeira. No entanto, alguns alunos determinaram a hipotenusa e verificaram o valor dado.

Na figura seguinte estão representados três triângulos e os comprimentos dos seus lados.




1. Mostra que os triângulos da figura são retângulos.

Figura 46 – Questão 1 da Tarefa 4.

Na questão 2 (Figura 47), os alunos, atendendo aos triângulos da Figura 40, tinham de calcular as razões trigonométricas dos ângulos agudos e determinar o valor do quociente entre seno e cosseno. O objetivo desta questão era que os alunos formulassem a conjetura que o valor do quociente entre seno e cosseno de um dado ângulo agudo é igual ao valor da sua tangente.

2. Determina as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de cada um dos ângulos assinalados na figura. Compara o valor da razão tangente com o quociente entre as razões seno e cosseno de cada ângulo. O que verificas?

Figura 47 – Questão 2 da Tarefa 4.

Por se tratar de uma questão bastante orientada, os alunos não demonstraram qualquer dificuldade em calcular os valores das razões pretendidas e formularam a conjetura de que a tangente de um dado ângulo agudo é igual à razão entre o seno e o cosseno desse ângulo (Figura 48).

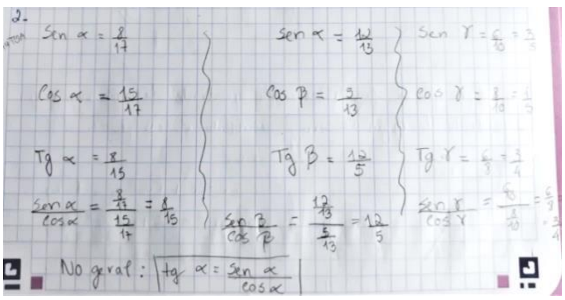



Figura 48 – Resolução de Mafalda e Miguel da Questão 2 da Tarefa 4.

Mafalda e Miguel calcularam com facilidade as razões propostas e ao observarem o valor do quociente entre o seno e o cosseno dos ângulos agudos assinalados formularam imediatamente a conjetura de que $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$.

A questão 3 (Figura 49) pretendia que os alunos, atendendo aos triângulos dados, generalizassem a fórmula fundamental da trigonometria.

**3.** Para cada ângulo assinalado na figura, determina a soma do quadrado da razão seno com o quadrado da razão cosseno. O que verificas?

Figura 49 – Questão 3 da Tarefa 4.

Durante a resolução alguns alunos mostraram alguma dificuldade na tradução de relações em linguagem natural para linguagem matemática como mostra o diálogo seguinte:

**Francisco S.:** Stôra, pode vir aqui?

**Professora:** O que se passa?

**Nicole:** Não percebemos o que é para fazer?

**Professora:** Podes ler em voz alta, se faz favor?

(Nicole leu para os colegas)

**Professora:** Então como se escreve em Matemática, "a soma do quadrado da razão seno com o quadrado da razão cosseno?"

**Luís:** Eu escrevi: $sen\alpha^2 + cos\alpha^2$ e a Marta disse que está mal.

**Marta:** Oh Stôra, nós não podemos pôr o ângulo ao quadrado, certo? É tudo que está ao quadrado!

**Professora:** Mas será que o Luís queria pôr o quadrado no ângulo ou no seno e no cosseno? Nicole e Francisco S. o que acham?

**Nicole:** Acho que percebi o que queremos fazer. Temos de fazer oito, dezassete avos ao quadrado mais quinze, dezassete avos ao quadrado e ver quanto dá.

**Professora:** O que achas Luís? Querias pôr o $\alpha$ ao quadrado?

**Luís:** Não tinha pensado bem. Agora já percebi, temos de pôr a razão $sen\alpha$ ao quadrado e o $cos\alpha$ também e depois somamos as duas.

Quando solicitei a Nicole a leitura em voz alta da questão, pretendia que os alunos retirassem da leitura o que efetivamente era importante para traçar uma estratégia para resolver o problema. A dificuldade inicial prendeu-se com a tradução de linguagem natural para linguagem matemática.

Depreendi, da intervenção de Luís, algumas lacunas na linguagem formal das razões trigonométricas. Por outro lado, Marta mostrou capacidade na identificação do erro de Luís e justificou esse erro baseando-se na estratégia correta para resolver a questão. Partindo de situações pontuais, os alunos formularam a conjetura que $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ (Figura 50).

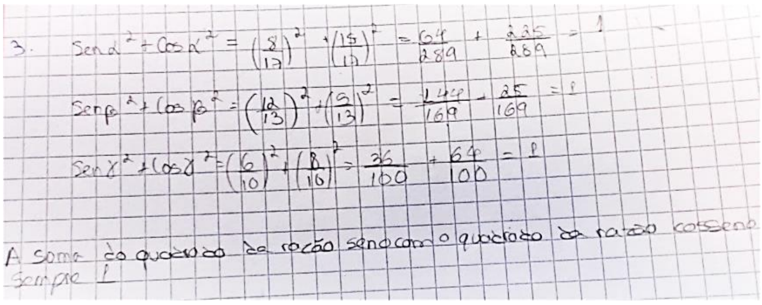



Figura 50 – Resolução de Nicole e Francisco S. da Questão 3 da Tarefa 4.

Apesar do diálogo estabelecido ter contemplado o erro de Luís, ao colocar o quadrado no ângulo $\alpha$, Nicole e Francisco S. escreveram incorretamente o quadrado das razões seno e cosseno. No entanto, calcularam corretamente a soma do quadrado das razões. Apoiados nestes três casos, os alunos formularam a conjetura que a soma do quadrado da razão seno de $\alpha$ com o quadrado da razão cos $\alpha$ é sempre igual a 1.

Durante a resolução da questão 4 (Figura 51), fui circulando pela sala de aula e constatei a existência de algumas dúvidas que se prendiam com o facto de não existirem triângulos retângulos desenhados nem comprimentos dados.

**4.** Investiga agora o valor da expressão seguinte para vários valores de $\alpha$

$$(sen\alpha + cos\alpha)^2 + (sen\alpha - cos\alpha)^2$$

Simplifica o valor da expressão anterior para qualquer valor de $\alpha$ a fim de provares que o resultado observado na investigação é válido qualquer que seja o valor de $\alpha$.

Figura 51 – Questão 4 da Tarefa 4.

Os alunos foram solicitando a minha ajuda e eu fui simplesmente, dizendo: “Reparem nas palavras: simplifica e para qualquer valor de $\alpha$”. Optei unicamente, por esta ajuda, uma vez que pretendia que os alunos trabalhassem com a expressão dada e formulassem a conjetura de que $(sen\alpha + cos\alpha)^2 + (sen\alpha - cos\alpha)^2$ era sempre igual a 2 para qualquer ângulo $\alpha$. A maioria dos grupos chegou à conclusão pretendida. No entanto, destaquei duas resoluções diferentes (Figuras 52 e 53).

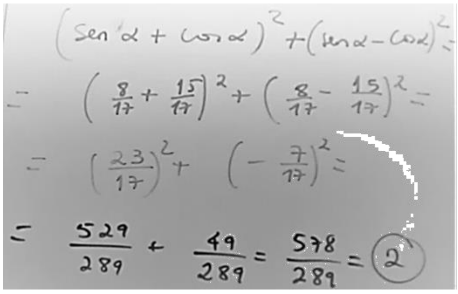



Figura 52 – Resolução de Helena e Joana da Questão 4 da Tarefa 4.

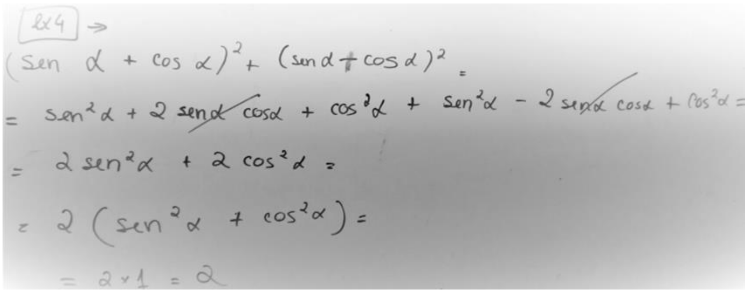



Figura 53 – Resolução de Ana e Constança da Questão 4 da Tarefa 4.

Para além de Helena e Joana, três grupos de alunos concluíram que a expressão dada era igual a dois utilizando os valores dos comprimentos dos triângulos dados na primeira questão. Estes alunos partiram de situações concretas e não generalizaram a igualdade pretendida para qualquer ângulo $\alpha$.

Já Ana e Constança bem como mais sete grupos evidenciaram capacidade em trabalhar com as razões seno e cosseno. Utilizaram aprendizagens realizadas em anos anteriores, nomeadamente o quadrado de um binómio, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e a fórmula fundamental da trigonometria.

Pedi ao grupo de Helena e Joana para transcreverem no quadro a sua resolução. Discretamente, solicitei aos grupos que tinham resolvido corretamente que se mantivessem discretos durante algum tempo no seguinte diálogo:

**Professora:** Meninos, a Helena e a Joana resolveram assim a questão 4.

**Mariana M.:** A nós também deu 2.

**Professora:** Sim, mas fizeram desta forma?

**Mariana M.:** Sim. Mas nós usamos os três triângulos lá de cima.

**Professora:** O enunciado diz para simplificar o valor da expressão para qualquer valor de $\alpha$. Foi o que fizeram?

**Helena:** Nós substituímos a expressão por valores e depois calculámos.

**Professora:** Pois foi.

**Helena:** Se calhar, assim não provamos que dá 2 para qualquer valor de $\alpha$.

**João S.:** Mas nós fizemos para os três triângulos e deu sempre 2.

**Professora:** Certo. Mas provas para qualquer valor de $\alpha$? Alguém quer ajudar a esclarecer?

**Inês S.:** Quando substituis por valores não provas para qualquer valor de $\alpha$.

**Martina:** Nós já tínhamos discutido isso num exercício.

**Miguel:** Então como fazemos essas contas? Nós não podemos somar o seno com o cosseno.

**Tito:** Dá 1.

**Professora:** O que é que dá 1 Tito?

**Tito:** Seno de $\alpha$ mais cosseno de $\alpha$.

**Martina:** O seno ao quadrado mais o cosseno ao quadrado é que dá 1.

**Tito:** Pois é. Então não sei.

**Professora:** Precisamos de ajuda. Ana e Constança podem ajudar?

**Constança:** Temos de desenvolver os casos notáveis e simplificar o que pudermos.

**Mariana M.**: Não percebi. Mas com o seno e com o cosseno?

**Constança:** Sim. Stôra, posso fazer no quadro?

**Professora:** Sim. E depois explica melhor. Ana, podes ajudar.

**Mariana M.:** Pois é, até é fácil. Não nos lembrámos disso.

**Miguel:** Só não percebi porque é que puseste o 2 em evidência.

**Ana:** Porque tu sabes que seno ao quadrado mais o cosseno ao quadrado dá 1. Mas tínhamos 2 seno ao quadrado mais 2 cosseno ao quadrado então pomos o 2 em evidência e ficamos com 2 vezes 1.

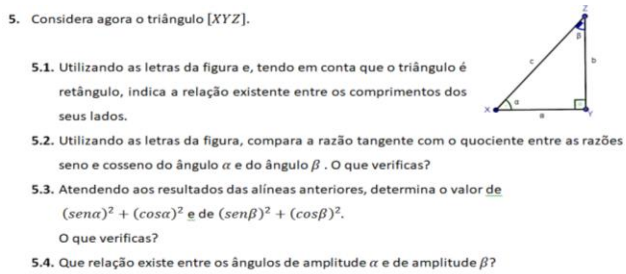
**Professora:** Bravo. Perceberam?

**Grupo de alunos:** Sim.

Do diálogo, pude constatar a existência de alguns alunos que apresentaram dificuldade em trabalhar com expressões com variáveis e que recorreram a valores anteriores para desenvolverem a expressão dada. Estes alunos não compreenderam, inicialmente, que ao substituírem por valores não generalizavam o resultado para qualquer valor de $\alpha$. Helena percebeu imediatamente o seu erro mas não acrescentou uma estratégia diferente para resolver a questão. A intervenção de Inês S. e de Martina exibiu uma excelente capacidade de justificar o erro cometido pelos colegas e estimulou o prosseguimento da discussão coletiva. Miguel reconheceu que não podia substituir a expressão por valores mas admitiu ter dificuldade em encontrar uma estratégia para simplificar a expressão. Tito na sua intervenção mostrou que não tinha apreendido a fórmula fundamental da trigonometria. No momento em que referiu o valor 1, percebi de imediato o erro que o aluno estava a cometer. No entanto, resolvi pedir-lhe para explicar o raciocínio com o objetivo de desfazer a confusão que ele tinha gerado. Ao perceber que não conseguia que os alunos que não tinham resolvido adequadamente a questão formulassem uma estratégia correta, solicitei auxílio a Ana e Constança. As alunas evidenciaram uma excelente capacidade de justificação face às dúvidas expostas pelos colegas. Ana e Constança elaboraram uma estratégia adequada e, articulando com aprendizagens realizadas anteriormente, generalizaram que o valor da expressão era igual a 2 para qualquer valor de $\alpha$. Logo de seguida, solicitei aos alunos que resolvessem a sugestão dada como trabalho de casa, usando as capacidades do programa do *Geogebra*.

Na questão 5 (Figura 54) os alunos tinham de generalizar a fórmula que relaciona a tangente de um ângulo agudo com o quociente entre o seno e o cosseno do respetivo ângulo bem como, a fórmula fundamental da trigonometria.

Durante a resolução, os alunos não evidenciaram dificuldades e resolveram todas alíneas utilizando uma estratégia adequada (Figura 55).



5. Considera agora o triângulo $[XYZ]$.

5.1. Utilizando as letras da figura e, tendo em conta que o triângulo é retângulo, indica a relação existente entre os comprimentos dos seus lados.

5.2. Utilizando as letras da figura, compara a razão tangente com o quociente entre as razões seno e cosseno do ângulo $\alpha$ e do ângulo $\beta$ . O que verificas?

5.3. Atendendo aos resultados das alíneas anteriores, determina o valor de $(sen\alpha)^2 + (cos\alpha)^2$ e de $(sen\beta)^2 + (cos\beta)^2$.

O que verificas?

5.4. Que relação existe entre os ângulos de amplitude $\alpha$ e de amplitude $\beta$?

Figura 54 – Questão 5 da Tarefa 4.

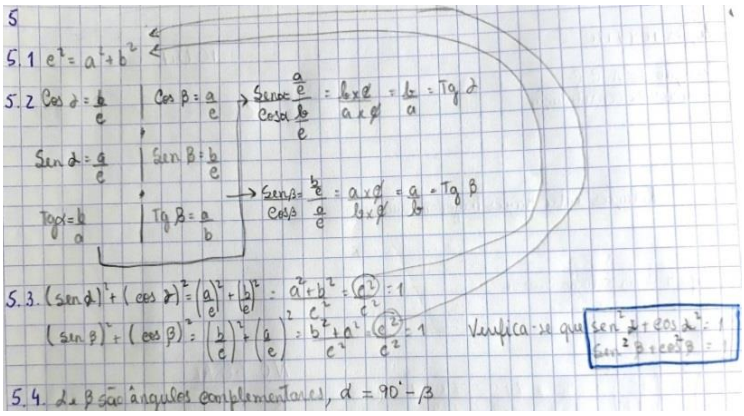



Figura 55 – Resolução de Mafalda e Miguel da Questão 5 da Tarefa 4.

Na primeira alínea da questão 5, os alunos recorreram à igualdade do Teorema de Pitágoras para relacionar os comprimentos dos lados do triângulo. Na segunda alínea, e sem qualquer dificuldade, os alunos determinaram o valor das razões para os ângulos $\alpha$ e $\beta$. Além disso, formularam a generalização de que a tangente é igual ao quociente entre o seno e o cosseno quer para $\alpha$ quer para $\beta$. Na terceira alínea, os alunos usando uma simbologia correta, formularam a conjetura que a soma entre os quadrados das razões seno e cosseno de qualquer ângulo agudo é igual a 1. Nesta questão já não existiu qualquer dificuldade por parte dos alunos em trabalhar com variáveis para formularem as generalizações que se pretendiam. Na quarta alínea, alguns alunos referiram simplesmente que os ângulos $\alpha$ e $\beta$ eram complementares. Mafalda e Miguel acrescentaram ainda a relação algébrica existente entre dois ângulos complementares. Os alunos, usando as variáveis dadas no triângulo, comprovaram as generalizações formuladas anteriormente, nomeadamente que o valor da tangente de um ângulo agudo é obtido pelo quociente entre o seno e o cosseno do ângulo dado e a fórmula fundamental da trigonometria.

A questão 6 (Figura 56) tinha como objetivo a aplicação da fórmula fundamental da trigonometria no cálculo da razão seno tendo sido dada a razão cosseno.

**6.** Relativamente a um ângulo agudo $\alpha$, sabe-se que $cos\alpha = \frac{3}{5}$. Determina o valor exato de $sen\alpha$.
Explica o teu raciocínio.

Figura 56 – Questão 6 da Tarefa 4.

Durante a resolução, constatei que alguns alunos tiveram dificuldade em aplicar corretamente aquela fórmula. Ao circular pela sala, percebi a existência de desentendimentos entre alguns alunos sobre a estratégia de resolução, e resolvi intervir para mediar a discussão:

**Professora:** Meninos, o que se passa?

**Mariana D.:** Eu fiz assim e eles estão a dizer que está mal. O Manuel até pôs uma cruz no meu caderno

**Professora:** Manuel!

**Manuel:** Desculpa, Mariana. Mas está mesmo mal.

**Professora:** OK. Então, Mariana, explica melhor o teu raciocínio.

**Mariana D.:** Eu pensei como o seno mais o cosseno é igual a 1 então o seno é 1 menos o cosseno. Então fiz $1 - \frac{3}{5}$ e dá-me $sen\alpha = \frac{2}{5}$.

**Duarte:** Mas não é o seno mais o cosseno que dá 1. É o seno ao quadrado mais o cosseno ao quadrado que dá 1.

**Matilde:** Oh, Mariana, nós fizemos como tu mas pusemos o quadrado no seno e nos $\frac{3}{5}$.

**Professora**: Mariana, qual é a Fórmula Fundamental da Trigonometria?

**Mariana D.**: É seno ao quadrado mais o cosseno ao quadrado igual a 1. Pois, já percebi o erro.

**Professora:** Mas tens sempre forma de verificar se o que fizeste está certo ou errado. E se fizesses a verificação do teu resultado?

**Mariana D**.: O quê? Substituir na fórmula e ver se dá 1?

**Professora**: Porque não?

**Mariana D**.: OK.

Mariana D. apesar de ter efetuado um raciocínio correto, não utilizou corretamente a fórmula fundamental da trigonometria, uma vez que não colocou os quadrados nas razões trigonométricas. Assim, o grau de dificuldade da sua resolução (Figura 57) diminuiu substancialmente e obteve um valor errado para a razão seno.

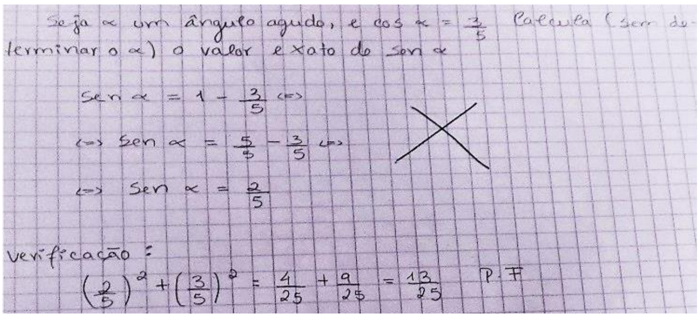



Figura 57 – Resolução de Mariana D. da Questão 6 da Tarefa 4.

As intervenções de Duarte e de Matilde, no momento em que referiram corretamente a fórmula fundamental da trigonometria, auxiliaram Mariana D. a perceber o erro que tinha cometido. Após a minha sugestão, a aluna verificou o resultado que obteve para a razão seno, colocando os respetivos quadrados nas razões. Apesar de não ter escrito que $\frac{13}{25}$ era diferente de 1, Mariana D. mostrou compreensão que o valor do seno de $\alpha$ não podia ser $\frac{2}{5}$ ao escrever P.F. referindo-se a uma proposição falsa.

Apesar de Manuel não ter dito, durante o diálogo estabelecido, qual a estratégia que utilizou para resolver a questão 6, percebi que era diferente da estratégia usada por Duarte e Matilde (Figuras 58 e 59).

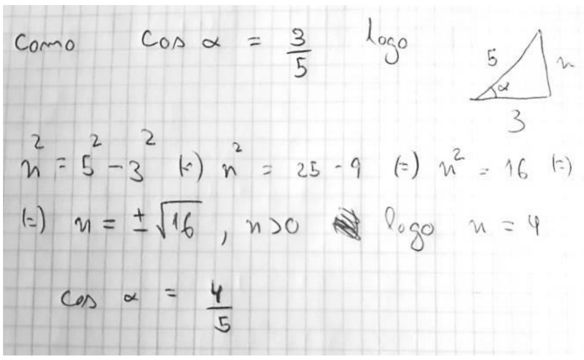



Figura 58 – Resolução de Manuel da Questão 6 da Tarefa 4.

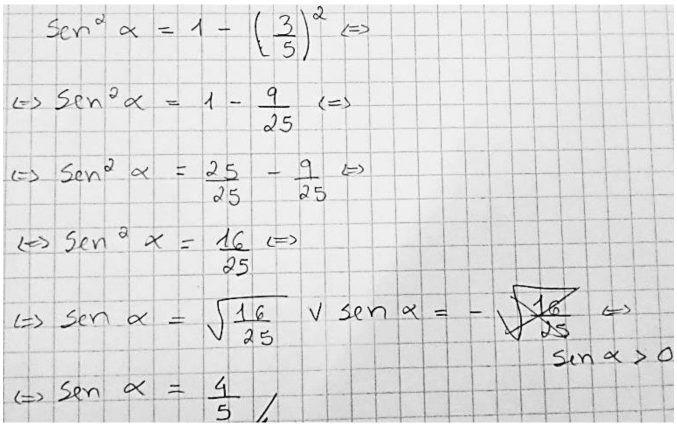



Figura 59 – Resolução de Duarte e Matilde da Questão 6 da Tarefa 4.

Manuel, na sua resolução, optou por recorrer ao Teorema de Pitágoras para encontrar o valor do cateto oposto, uma vez que considerou que o valor $\frac{3}{5}$ correspondia ao cateto adjacente e à hipotenusa respetivamente. A estratégia utilizada por Manuel é adequada e apresentou uma linguagem simbólica correta, embora não tenha recorrido à fórmula fundamental da trigonometria.

Já Duarte e Matilde recorreram a uma das aprendizagens realizadas durante a Tarefa 4, nomeadamente à fórmula fundamental da trigonometria, para descobrir o valor do cosseno de $\alpha$, uma vez que era dado o valor do seno de $\alpha$. Apresentaram ainda uma excelente capacidade na manipulação algébrica da equação do segundo grau, inclusivamente, justificaram a eliminação do valor negativo do seno de $\alpha$. Lamentavelmente, não tive tempo de colocar estas estratégias de resolução no quadro e promover a discussão na turma sobre qual seria a mais eficaz para resolver problemas desta natureza. Resolvi transcrever apenas a resolução de Duarte e de Matilde por se tratar da que referia uma aprendizagem realizada sobre a trigonometria.

*Análise.* Ao longo da aula, constatei que todos os alunos determinaram com facilidade as razões trigonométricas de um ângulo agudo. A generalização de que a tangente de um ângulo agudo é dada pelo quociente entre os valores do seno e do cosseno desse ângulo foi efetuada pela totalidade dos alunos. No entanto, quando foi solicitada a generalização da fórmula fundamental da trigonometria, alguns alunos mostraram dificuldade na tradução da linguagem natural para linguagem simbólica. Ultrapassada esta dificuldade, os alunos conseguiram formular a conjetura que a soma do quadrado da razão seno de $\alpha$ com o quadrado da razão cos $\alpha$ é sempre igual a 1.

No momento em que foi solicitada a simplificação de uma expressão algébrica para qualquer valor de $\alpha$, ainda existiram alguns alunos que recorreram à substituição dos valores do seno e do cosseno por razões conhecidas. Os alunos compreenderam que para generalizarem o resultado de uma expressão para qualquer valor de $\alpha$, não podiam usar valores numéricos, mas voltaram a demonstrar dificuldade em trabalhar com variáveis. Ainda assim, destacaram-se muitos alunos que mostraram uma boa capacidade na simplificação da expressão solicitada. Estes alunos usaram aprendizagens realizadas anteriormente, nomeadamente sobre o desenvolvimento do quadrado de um binómio, bem como a fórmula fundamental da trigonometria.

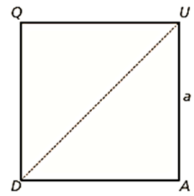
Quando foi solicitado aos alunos que justificassem as generalizações anteriores usando variáveis, verifiquei que todos utilizaram a estratégia adequada e obtiveram os resultados pretendidos. Nesta questão, os alunos evidenciaram compreensão das aprendizagens que se pretendiam realizar e verifiquei que as dificuldades iniciais em trabalhar com variáveis tinham sido em muitos casos ultrapassadas.

Embora tenham existido evidências da compreensão da fórmula fundamental da Trigonometria pelos alunos, uma aluna mostrou dificuldade na aplicação desta fórmula quando solicitei o valor do cosseno conhecido o valor do seno de um certo ângulo. Esta aluna omitiu os quadrados nas razões e, apesar de ter efetuado um raciocínio correto, determinou um valor errado para o cosseno. O auxílio dos colegas, durante a discussão que se estabeleceu, em que referiram a ausência dos quadrados nas razões trigonométricas, permitiu à aluna perceber o erro e ultrapassar a dificuldade inicial. As estratégias utilizadas pelos alunos diferiram. Alguns alunos recorreram ao Teorema de Pitágoras para encontrar o valor do cateto adjacente a $\alpha$ e com este determinaram o valor do cosseno. Os restantes alunos recorreram à fórmula fundamental da Trigonometria e substituíram corretamente o valor da razão seno, determinando o valor pretendido. Apesar de a questão ter sido corrigida no quadro, não teve lugar a discussão coletiva, como tinha planeado, uma vez que a aula entretanto terminou.

### 5.8. Tarefa 5 – Razões trigonométricas dos ângulos de $30^0, 45^0\ e\ 60^0$

A aula teve início com a correção das alíneas da questão 5 da página 56 do manual, proposta para casa na aula anterior. Todos os alunos exceto quatro resolveram a questão sem qualquer dificuldade. Quando questionados sobre o motivo de não terem resolvido o que lhes tinha solicitado, os alunos alegaram que "não tiveram tempo" ou "não se lembraram". Foram resolvidas, no quadro, as alíneas desta questão. De seguida, informei os alunos que iriam resolver a tarefa do manual da página 57 e que à semelhança das outras aulas deveriam trabalhar em pares. Referi ainda a importância dos ângulos de $30^0, 45^0\ e\ 60^0$ no estudo da Trigonometria em especial no ensino secundário.

A primeira questão da tarefa 5 tinha como propósito a determinação do valor exato das razões trigonométricas do ângulo de $45^0$ (Figura 60).




1. Na figura, $[DU]$ é uma diagonal do quadrado de lado $a$.

   a) Qual é a medida da amplitude do ângulo UDA? Justifica.

   b) Calcula, a partir do quadrado de lado $a$, os valores de $sen45^0$, $\cos 45^0\ \ e\ tg45^0$.

Figura 60 – Questão 1 da Tarefa 5.

Na primeira alínea da questão os alunos não mostraram qualquer dificuldade. Determinaram e justificaram corretamente a medida da amplitude do ângulo UDA (Figura 61). Gonçalo e Martina apresentaram apenas um erro de natureza simbólica quando se referiram ao ângulo QDA colocando-o entre parênteses reto.

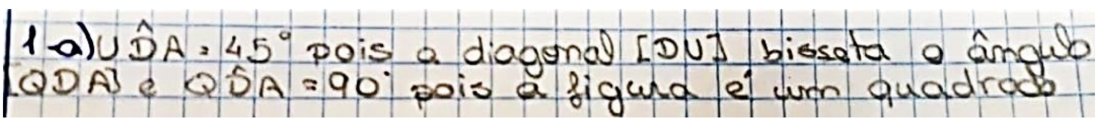

1 a) $U\hat{D}A = 45°$ pois a diagonal [DU] bissecta o ângulo [QDA] e $Q\hat{D}A = 90°$ pois a figura é um quadrado

Figura 61 – Resolução de Gonçalo e Martina da alínea a) da Questão 1 da Tarefa 5.

Logo no início da segunda alínea da questão 1, alguns alunos começaram a resolver o que se lhes pedia recorrendo à calculadora. Tive de intervir, solicitando que deveriam guardar as calculadoras e determinarem a partir do lado do quadrado de comprimento *a* as razões pedidas. Ao circular pela sala, verifiquei a existência de dúvidas similares entre vários alunos e decidi alargar a discussão para toda a turma:

**Professora:** Meninos, o que se passa?

**Roberta:** Stôra o seno é o cateto oposto sobre a hipotenusa. Mas nós não temos a hipotenusa.

**Professora:** Pois não! Mas conseguimos encontra-la?

**Luís:** Nós pensámos dar 1 ao valor de $a$ e como o cateto oposto é igual ao adjacente então o lado DA também é 1 e achámos a hipotenusa.

**Professora:** Pois Luís, mas o exercício pede em função de $a$. E qual é o valor de $a$?

**Grupo de alunos:** É $a$.

**Professora:** Então não podemos dar valor algum ao $a$.

**Inês B.:** Mas podemos fazer o que o Luís disse com a letra $a$!

**Professora:** Explica melhor:

**Inês B.**: O cateto oposto é $a$, como é um quadrado o cateto adjacente também é $a$. Com o Teorema de Pitágoras encontramos a hipotenusa. Depois é fácil.

**Roberta:** O difícil é achar a hipotenusa com letras.

**Professora:** Mas não é impossível. Vamos lá.

**Helena:** Eu já fiz isso e cheguei a $\sqrt{2a^2}$. Podemos separar em duas raízes?

**Professora:** Helena, é uma pergunta ou uma afirmação?

**Helena:** Pergunta.

**Professora:** Eu penso que tu sabes a resposta.

**Inês S.:** Quando demos as propriedades das raízes vimos que podíamos separar quando estavam a multiplicar. Nós fizemos isso e deu $\sqrt{2}a$.

**Professora:** Mas antes desse resultado tinham como?

**Inês S.**: $\sqrt{2} \times \sqrt{a^2}$ e depois simplificámos o quadrado com a raiz.

**Professora:** E podem simplificar?

**Inês S.:** Podemos.

**Professora:** Porquê?

**Martina:** Porque $a$ é positivo.

**Professora:** Explica melhor, Martina.

**Martina:** $a$ é um comprimento logo é positivo. Nós só podemos cortar o quadrado com a raiz se a base for positiva.

**Professora:** Não se diz cortar mas simplificar. Mas sim, é isso mesmo.

Os alunos compreenderam que deviam descobrir o valor da hipotenusa encontrando assim uma estratégia que lhes permitia determinar as razões trigonométricas de $45^0$. No entanto, a dificuldade sentida por alguns prendeu-se com a manipulação do Teorema de Pitágoras usando variáveis para os catetos oposto e adjacente. Apesar de ser um assunto debatido em muitas aulas, Luís ainda insistiu em substituir uma variável por um valor escolhido por ele. Inês B. desencadeou todo o diálogo que se seguiu no momento em que referiu que deviam determinar a hipotenusa, usando o Teorema de Pitágoras, mantendo o valor de *a* para os catetos oposto e adjacente. Logo de seguida, surgiu a dificuldade sentida por Helena na simplificação de $\sqrt{2a^2}$. No entanto, Inês S. explicou corretamente todo o processo que utilizou para chegar ao resultado simplificado do valor da hipotenusa em função de *a*. Martina auxiliou Inês S. na justificação adequada que permitia simplificar a raiz quadrada de *a* ao quadrado referindo que, sendo *a* um valor positivo, por se tratar de um comprimento, era possível simplificar a raiz quadrada com o quadrado de *a*.

Constatei que três grupos tinham utilizado a estratégia sugerida por Luís, substituindo a variável *a* por 1 para o cateto oposto (Figura 62).

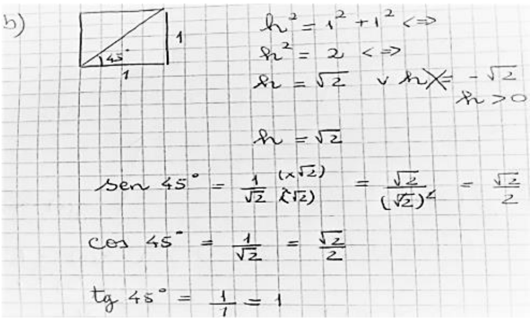


Figura 62 – Resolução de Mariana M. e João B. da alínea b) da Questão 1 da Tarefa 5.

Mariana M. e João B. substituíram o valor de *a* por um e calcularam corretamente o valor da hipotenusa, manipulando adequadamente a equação do segundo grau. Não mostraram dificuldade na racionalização dos denominadores dado que, se tratava de uma aprendizagem realizada em aulas anteriores ao conteúdo da Trigonometria. No final, obtiveram o resultado pretendido embora, não tenham obedecido ao facto de terem de calcular as razões trigonométricas usando o lado *a*.

Já Mafalda e Miguel (Figura 63) utilizaram uma estratégia adequada respeitando o facto de ter sido solicitado o cálculo das razões trigonométricas usando o lado *a*.

Mafalda e Miguel determinaram o valor da hipotenusa, usando sempre a variável *a* para os valores dos catetos.

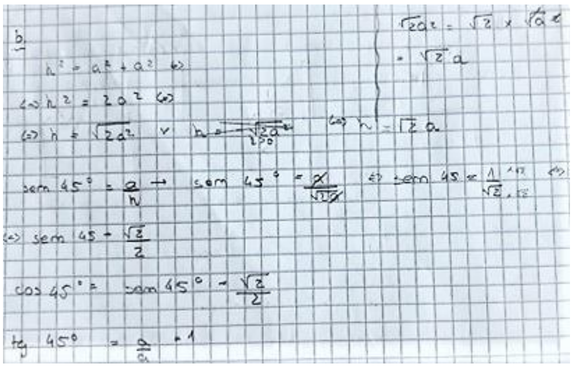
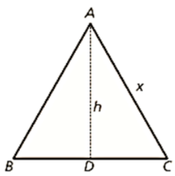


Figura 63 – Resolução de Mafalda e Miguel da alínea b) da Questão 1 da Tarefa 5.

Inclusive, em cálculo auxiliar, explicaram como simplificaram o valor de $\sqrt{2a^2}$. Tal como no grupo de Mariana M. e de João B., no cálculo do seno de $45^0$ racionalizaram o denominador não mostrando qualquer dificuldade. No entanto, no cálculo do cosseno de $45^0$ escreveram apenas que este era igual ao seno de $45^0$ não referindo a justificação para este facto. Contudo, evidenciaram uma boa capacidade na manipulação algébrica da equação do segundo grau, na racionalização dos denominadores e no conhecimento da igualdade das razões trigonométricas do seno e do cosseno dos ângulos complementares.

Após a resolução no quadro desta questão, os alunos resolveram de imediato a segunda questão da tarefa (Figura 64).

**2.** Considera o seguinte triângulo equilátero $[ABC]$ de lado $x$ no qual foi traçada uma das suas alturas.




**a)** Escreve o comprimento da altura, $\boldsymbol{h}$, do triângulo em função de $\boldsymbol{x}$.

**b)** Qual é a medida da amplitude do ângulo interno ABC do triângulo? Justifica.

**c)** Qual é a medida da amplitude do ângulo BAD? Justifica.

**d)** Calcula, a partir do triângulo $[ADC]$, os valores exatos de $sen60^0$, $\cos 60^0$ $e\ tg60^0$.

**e)** Calcula, a partir do triângulo $[ADC]$, os valores exatos de $sen30^0$, $\cos 30^0$ $e\ tg30^0$.

Figura 64 – Questão 2 da Tarefa 5.

Pretendia-se, com esta questão, a determinação dos valores exatos das razões trigonométricas para os ângulos de $30^0$ e de $60^0$. Nesta questão, os alunos não evidenciaram dificuldade no cálculo do valor de um cateto em função de x (Figura 65).

Concluí que a explicação proveniente da discussão anterior, de Inês S. e de Martina, surtiu um efeito positivo nas dúvidas iniciais sobre a manipulação do Teorema de Pitágoras usando variáveis.

Bárbara e Frederico substituíram a variável *h*, que se encontrava na figura, por *alt*. Quando os questionei sobre o motivo de tal troca de variáveis, os alunos referiram que lhes fazia confusão com a variável *h* que normalmente usavam para a hipotenusa.

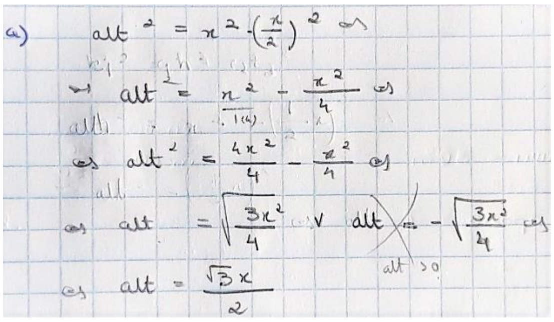



Figura 65 – Resolução de Bárbara e Frederico da alínea a) da Questão 2 da Tarefa 5.

Bárbara e Frederico, tal como Mafalda e Miguel na resolução da alínea b) da questão 1, manipularam corretamente a equação do segundo grau no cálculo de um cateto. Da resolução exposta, verificou-se também a justificação adequada para a eliminação do valor negativo da altura do triângulo bem como uma simplificação correta da raiz quadrada de $\frac{3x^2}{4}$.

As justificações apresentadas nas alíneas b) e c) pelos alunos foram similares não tendo ocorrido a existência de qualquer dúvida (Figura 66).

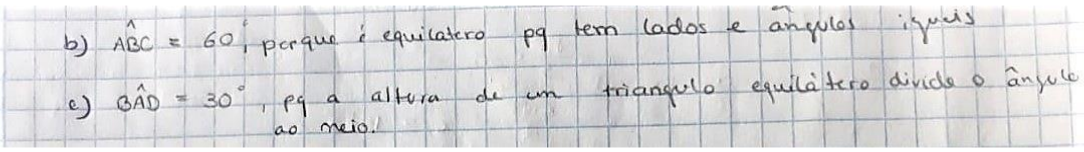



Figura 66 – Resolução de Bárbara e Frederico das alíneas b) e c) da Questão 2 da Tarefa 5.

Todos os alunos justificaram que a amplitude do ângulo ABC era igual a $60^0$ mencionando o facto do triângulo ser equilátero e, como tal, tinha os lados e os ângulos iguais. Bárbara e Frederico na sua justificação omitiram a explicação de como tinham obtido o valor de $60^0$, podendo ter melhorado a sua resposta se tivessem referido que, como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é $180^0$ então $\frac{180}{3} = 60$.

A justificação apresentada por Bárbara e Frederico, na alínea c) da questão 2, focou o mais importante, no entanto, poderiam ter acrescentado à sua justificação que a altura de um triângulo equilátero divide a base em dois segmentos de reta iguais e como tal também divide o ângulo ao meio.

A partir do momento que os lados do triângulo retângulo foram determinados em função de *x*, todos os alunos calcularam, sem qualquer dificuldade, os valores exatos das razões trigonométricas de $60^0$ utilizando as definições do seno, do cosseno e da tangente (Figura 67).

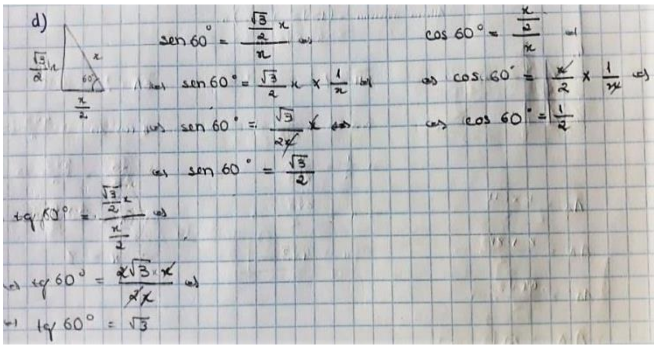


Figura 67 – Resolução de Bárbara e Frederico das alíneas d) da Questão 2 da Tarefa 5.

Bárbara e Frederico optaram por desenhar um esquema do triângulo, assinalando os comprimentos dados em função de *x*, tal como, a amplitude do ângulo agudo cujas razões pretendiam calcular. Os alunos demonstraram uma excelente capacidade na manipulação algébrica e uma escrita matemática com grande rigor. Curiosamente, todos os grupos calcularam a tangente de $60^0$ usando o quociente entre o cateto oposto e o cateto adjacente. Era minha expectativa, que os alunos usassem o quociente entre o seno e o cosseno de $60^0$para determinar a tangente, o que não aconteceu.

Já na alínea e) da questão 2, apesar de não terem ocorrido dúvidas, deparei-me com duas resoluções diferentes (Figuras 68 e 69).

Joana e Helena utilizaram a mesma estratégia que Bárbara e Frederico quando calcularam as razões trigonométricas de $60^0$, isto é, determinaram as razões seno e cosseno de $30^0$ usando as respetivas definições.

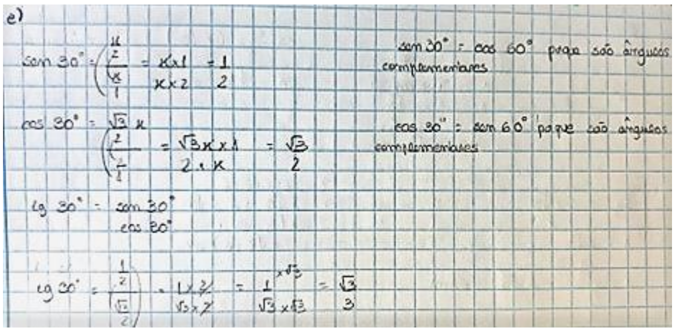



Figura 68 – Resolução de Joana e Helena da alínea e) da Questão 2 da Tarefa 5.

No entanto, para calcularem a tangente de $30^0$ recorreram à relação existente entre o seno, o cosseno e a tangente, ou seja, determinaram a tangente através do quociente entre o seno e o cosseno. Evidenciaram assim, um bom relacionamento das aprendizagens realizadas em aulas anteriores.

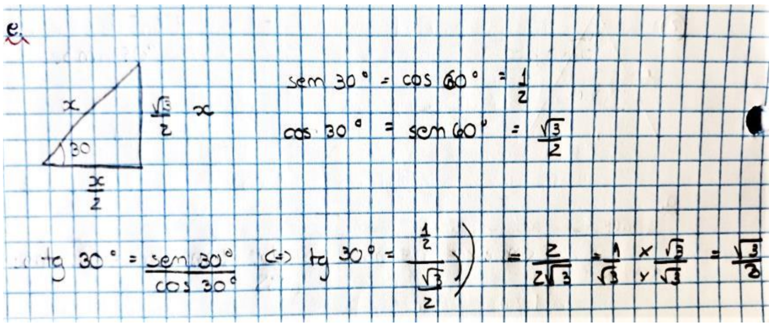



Figura 69 – Resolução de Mafalda e Miguel da alínea e) da Questão 2 da Tarefa 5.

A estratégia de Mafalda e Miguel diferiu da utilizada por Joana e Helena, uma vez que a sua resolução contemplou o conhecimento que os alunos tinham sobre a igualdade das razões seno e cosseno de ângulos complementares. Mafalda e Miguel não recorreram a cálculos mais ou menos exaustivos para chegar aos valores exatos de $sen30^0$ e de $cos30^0$. No entanto, a estratégia usada para determinar a tangente foi igual à de Joana e de Helena pois recorreram ao quociente entre o seno e o cosseno. Também estas alunas mostraram uma boa compreensão e um excelente conhecimento das aprendizagens realizadas.

*Análise.* No decorrer da aula, constatei que a maior dificuldade dos alunos, durante o trabalho autónomo, prendeu-se com realização de cálculos envolvendo o Teorema de Pitágoras utilizando variáveis. Também durante a discussão coletiva, os alunos continuaram a insistir na substituição de uma variável por um número à sua escolha, mesmo quando pretendiam generalizar um resultado para qualquer valor. No entanto, esta dificuldade apenas se manifestou na resolução da primeira questão. Ainda durante a resolução desta questão surgiu uma dúvida relativa às propriedades da simplificação das raízes quadradas. Uma aluna mostrou insegurança em escrever $\sqrt{2a^2}$ na forma de produto de duas raízes, isto é, fazer $\sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{a^2}$ para obter no final $\sqrt{2}a$. No entanto, duas alunas com as suas explicações e justificações, durante a discussão coletiva, auxiliaram a colega a ultrapassar a sua dificuldade. Superada a dificuldade, os alunos conseguiram generalizar os valores exatos das razões trigonométricas dos ângulos agudos de $30^0$ , $45^0$ $e$ $60^0$.

A maioria dos alunos aplicou as definições das razões trigonométricas como estratégia de resolução para determinar o valor das razões seno, cosseno e tangente de $45^0$ e $60^0$. No entanto, durante a resolução, um grupo determinou o seno de $45^0$ e igualou-o ao cosseno de $45^0$. Apesar de não terem justificado o facto, depreendi que os alunos demonstraram uma boa capacidade de articular as aprendizagens realizadas, nomeadamente o conhecimento da igualdade entre o seno e o cosseno de ângulos complementares.

No cálculo das razões trigonométricas de $30^0$, surgiram duas estratégias de resolução diferentes. Por um lado, a grande maioria dos grupos resolveu a questão de modo idêntico às questões anteriores, isto é, recorreu à definição de seno e cosseno. Já na tangente, a maioria optou pela sua relação com o seno e com o cosseno, isto é, conhecidas as razões seno e cosseno de $30^0$, calculou o quociente entre estas duas razões e determinou o valor exato para a tangente de $30^0$.

A estratégia de resolução dos restantes alunos partiu do conhecimento da relação que existe entre as razões seno e cosseno de ângulos complementares. Escreveram, simplesmente, que seno de $30^0$ é igual ao cosseno de $60^0$ e ainda que cosseno de $30^0$ é igual ao seno de $60^0$. No cálculo da tangente de $30^0$ os alunos também usaram o quociente entre o seno e o cosseno do referido ângulo.

Importa salientar que, durante a resolução das várias questões, os alunos mostraram uma excelente manipulação algébrica de equações do 2.º grau, na aplicação do Teorema de Pitágoras, bem como no uso de linguagem simbólica adequada.

## 5.9. Análise da Ficha de avaliação

Antes de iniciar a análise da ficha de avaliação, importa referir que dois alunos faltaram às aulas nesse dia e, como tal, somente 27 alunos a efetuaram. A ficha de avaliação era constituída por dois cadernos. O primeiro, com recurso à calculadora, deveria ser resolvido em 30 minutos. Esta primeira parte era constituída por quatro tarefas. O segundo caderno também tinha uma duração de 30 minutos, mas os alunos já não podiam utilizar a calculadora. Deste caderno fazia parte quatro questões de escolha múltipla e três tarefas de desenvolvimento. Importa referir que em ambos os cadernos os alunos podiam usar a tabela trigonométrica.

A primeira questão do Caderno 1 tinha como objetivo determinar a hipotenusa de um triângulo conhecidos, o cateto adjacente e a amplitude de um ângulo agudo (Figura 70).

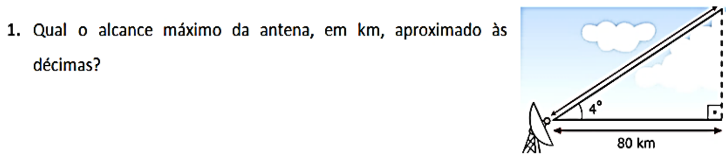



Figura 70 – Questão 1 da Ficha de avaliação – Caderno 1.

Analisadas as respostas dadas, verifiquei que, vinte e quatro alunos (89%), utilizaram a razão trigonométrica do cosseno como estratégia para determinar o alcance máximo da antena. No entanto, dois destes alunos, apesar de terem identificado corretamente a razão trigonométrica, mostraram dificuldade na manipulação algébrica da equação obtida (Figura 71). Os restantes três alunos não responderam à questão.

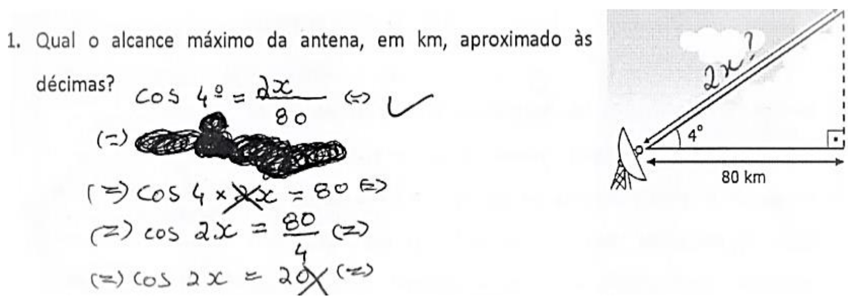
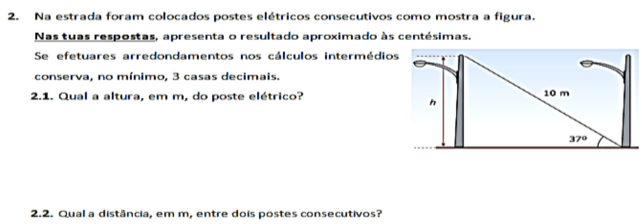



Figura 71 – Resolução de Luís da Questão 1 da Ficha de avaliação – Caderno 1.

Luís identificou na figura a hipotenusa com a variável $2x$ e escreveu corretamente a equação que traduzia o problema. No entanto, na manipulação algébrica da proporção, aplicou erradamente a propriedade fundamental das proporções. Durante a sua resolução, Luís confundiu a amplitude do ângulo com o comprimento da hipotenusa. O erro cometido impediu Luís de completar a resolução da questão. Uma aluna, nesta questão, utilizou a razão trigonométrica da tangente e determinou corretamente o cateto oposto. No entanto, não completou a resolução para determinar a hipotenusa não respondendo assim, ao que era solicitado. Dois alunos não efetuaram qualquer resposta à questão.

A questão 2 era composta por duas alíneas. O intento da primeira alínea era a aplicação da razão trigonométrica do seno como estratégia para determinar o valor do cateto oposto. Já a segunda alínea, os alunos podiam utilizar duas estratégias diferentes de resolução. Por um lado, a utilização do cosseno para encontrarem o valor do cateto adjacente não necessitando, para isso, dos cálculos efetuados na alínea anterior. Por outro lado, poderiam usar o Teorema de Pitágoras ou a razão trigonométrica da tangente, recorrendo ao valor encontrado na alínea anterior (Figura 72).


2. Na estrada foram colocados postes elétricos consecutivos como mostra a figura.
**Nas tuas respostas**, apresenta o resultado aproximado às centésimas.
Se efetuares arredondamentos nos cálculos intermédios conserva, no mínimo, 3 casas decimais.
2.1. Qual a altura, em m, do poste elétrico?

2.2. Qual a distância, em m, entre dois postes consecutivos?

Figura 72 – Questão 2 da Ficha de avaliação – Caderno 1.

Na primeira alínea, vinte e quatro alunos (89%) identificaram corretamente a razão trigonométrica do seno para determinar a altura do poste elétrico. Destes, apenas um aluno mostrou dificuldade na manipulação algébrica da equação (Figura 73).

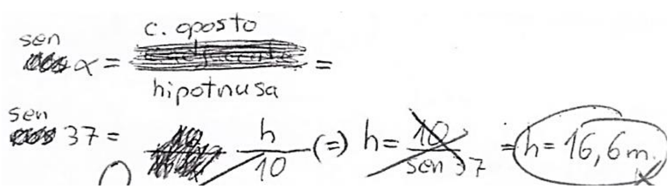



Figura 73 – Resolução de Francisco S. da alínea 2.1 da Ficha de avaliação – Caderno 1.

Francisco S. identificou corretamente a razão trigonométrica, equacionou a equação mas, mostrou dificuldade na manipulação algébrica da proporção para além dos erros cometidos de natureza simbólica. Constatei ainda, a ausência de espírito crítico do aluno, uma vez que obteve um valor para o cateto oposto superior ao da hipotenusa e não referiu sequer que o valor obtido não fazia sentido no contexto da situação em causa. Três alunos não efetuaram qualquer resolução desta alínea.

Na segunda alínea da questão 2, vinte e dois alunos (81%) responderam corretamente. Observei no entanto, a existência de três estratégias diferentes de resolução. A maioria destes alunos, precisamente dezasseis, recorreu à razão trigonométrica do cosseno para determinar a distância entre os dois postes. A segunda estratégia mais utilizada, mais propriamente cinco alunos, usaram o Teorema de Pitágoras recorrendo ao valor obtido na alínea anterior do cateto oposto. Apenas uma aluna, também com recurso ao valor encontrado anteriormente do cateto oposto, usou a tangente para determinar a distância entre os dois postes. Três alunos não responderam a esta questão.

Do grupo de alunos que respondeu parcialmente, salientei a estratégia utilizada de Francisco S., autor da resolução da Figura 73. Francisco S., embora tenha utilizado o Teorema de Pitágoras, mostrou dificuldade ao nível dos cálculos em virtude do erro cometido na alínea anterior (Figura 74).

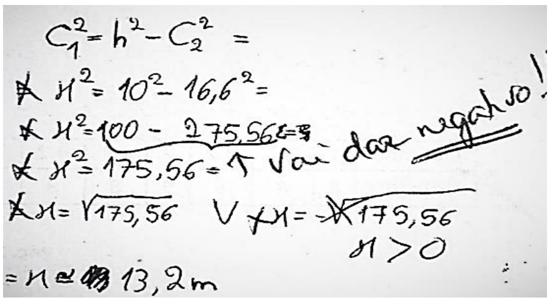
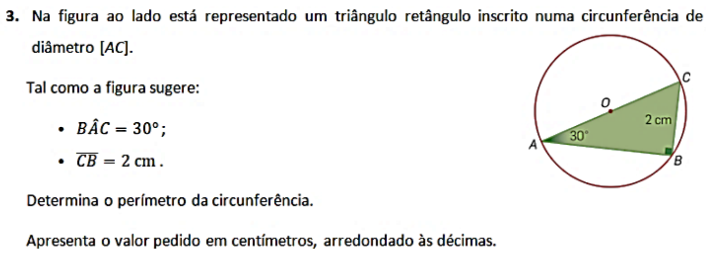



Figura 74 – Resolução de Francisco S. da alínea 2.2 da Ficha de avaliação – Caderno 1.

Francisco S., apesar dos erros de natureza simbólica que cometeu, nomeadamente a troca do sinal de equivalente pelo sinal de igual, utilizou o Teorema de Pitágoras, como estratégia, para determinar o cateto adjacente. Ao substituir os valores, apesar de se encontrar a resolver uma tarefa com recurso à calculadora, ignorou o facto do resultado obtido ser negativo e calculou erradamente o valor do cateto. Mais uma vez, não revelou qualquer espírito crítico já que, também neste caso, obteve para o comprimento do cateto um valor superior ao da hipotenusa e nada referiu.

Na questão 3, os alunos deviam utilizar a trigonometria para calcular o diâmetro da circunferência e com esse valor encontrado podiam determinar o seu perímetro (Figura 75).



**3.** Na figura ao lado está representado um triângulo retângulo inscrito numa circunferência de diâmetro $[AC]$.

Tal como a figura sugere:

- $B\hat{A}C = 30°$;
- $\overline{CB} = 2\ \text{cm}$.

Determina o perímetro da circunferência.

Apresenta o valor pedido em centímetros, arredondado às décimas.



Figura 75 – Questão 3 da Ficha de avaliação – Caderno 1.

Nesta questão, verifiquei a existência de vinte e um alunos (78%) que utilizaram a estratégia adequada e responderam corretamente. É de referir que duas alunas também utilizaram a estratégia adequada mas substituíram o valor de $\overline{AC}$ como sendo o raio da circunferência (Figura 76). Além destas, verifiquei a existência de mais dois alunos que mostraram dificuldade na escolha da razão trigonométrica apropriada para esta situação (Figura 77). Nesta questão, verificou-se ainda a existência de dois alunos que não responderam.

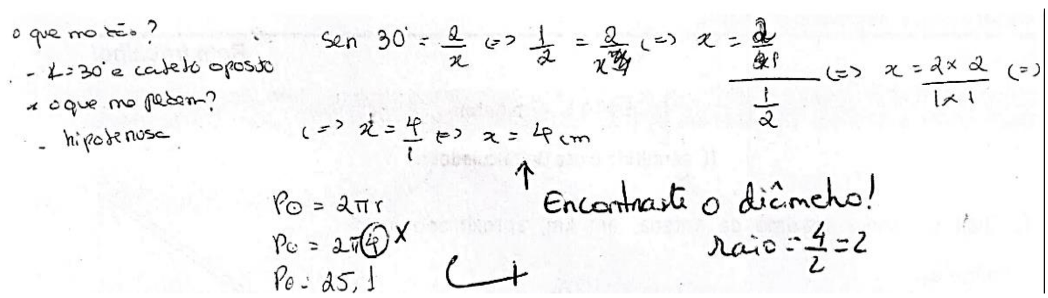




Figura 76 – Resolução de Mariana D. da Questão 3 da Ficha de avaliação – Caderno 1.

Mariana D. não demonstrou dificuldade na resolução da questão mas, por lapso, substituiu incorretamente o valor do raio pelo diâmetro que tinha determinado sob a designação de $x$. Importa salientar as questões norteadoras que Mariana D. coloca na sua resolução que foram alvo de discussão ao longo das aulas e que auxiliaram a resolução de problemas.

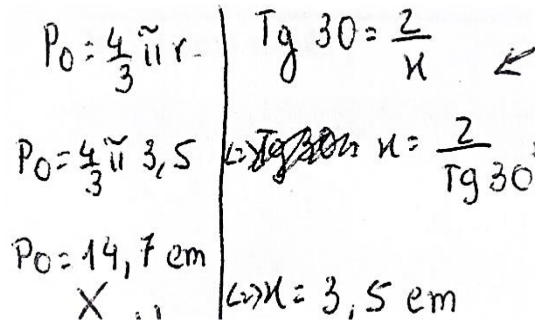
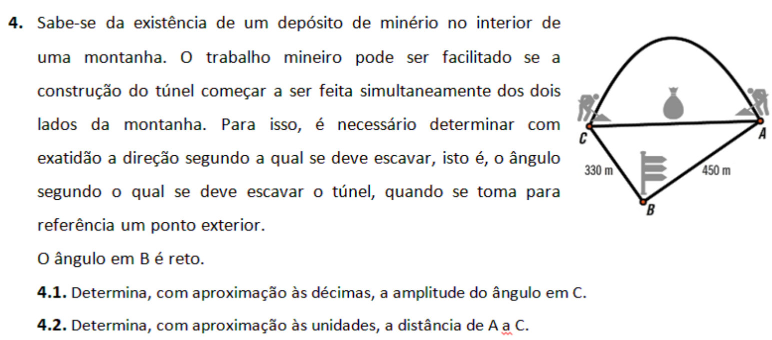



Figura 77 – Resolução de Marta da Questão 3 da Ficha de avaliação – Caderno 1.

Marta utilizou a razão trigonométrica da tangente para determinar o valor de $\overline{AB}$ mas não completou a sua estratégia, uma vez que identificou o valor obtido como sendo o raio da circunferência. Para além disso, designou uma fórmula para o perímetro da circunferência totalmente errada.

A primeira alínea da questão 4 tinha como objetivo apurar a capacidade dos alunos na passagem do valor da razão trigonométrica para a sua função inversa. Já a segunda alínea, e última do Caderno 1, pretendia verificar qual a estratégia que os alunos escolhiam para determinar a hipotenusa. As escolhas recaíam entre o Teorema de Pitágoras ou a utilização da razão trigonométrica do seno ou do cosseno (Figura 78).



**4.** Sabe-se da existência de um depósito de minério no interior de uma montanha. O trabalho mineiro pode ser facilitado se a construção do túnel começar a ser feita simultaneamente dos dois lados da montanha. Para isso, é necessário determinar com exatidão a direção segundo a qual se deve escavar, isto é, o ângulo segundo o qual se deve escavar o túnel, quando se toma para referência um ponto exterior.

O ângulo em B é reto.

**4.1.** Determina, com aproximação às décimas, a amplitude do ângulo em C.

**4.2.** Determina, com aproximação às unidades, a distância de A a C.



Figura 78 – Questão 4 da Ficha de avaliação – Caderno 1.

Na primeira alínea da questão 4, apenas dezasseis alunos (59%) responderam corretamente à questão. Dos restantes, observei a existência de seis alunos que embora tenham utilizado corretamente a razão trigonométrica da tangente não completaram a resolução, uma vez que não efetuaram a passagem da função tangente para a sua inversa. Importa ainda referir que cinco alunos não responderam a esta alínea.

Das estratégias utilizadas, destaquei a resolução de Manuel dado que, o aluno não utilizou diretamente a função inversa para determinar a amplitude do ângulo em C (Figura 79).

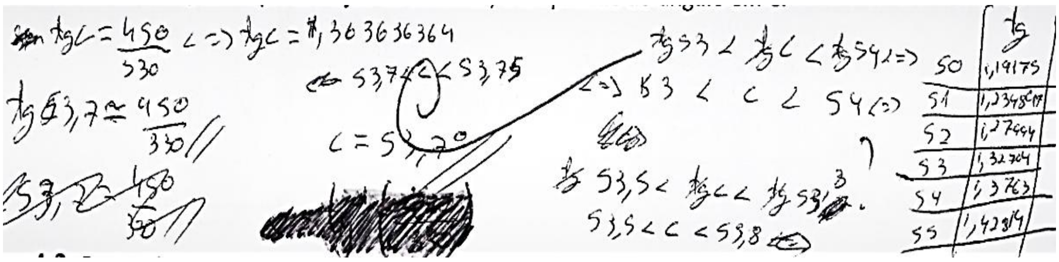


Figura 79 – Resolução de Manuel da alínea 4.1 da Ficha de avaliação – Caderno 1.

Manuel identificou corretamente a razão tangente para responder ao solicitado. Apesar de ter a calculadora como instrumento auxiliar, Manuel recorreu à tabela trigonométrica e por tentativas enquadrou a amplitude do ângulo em C entre dois valores e finalizou a sua resolução respondendo corretamente à questão.

Na segunda alínea da questão 4, dezoito alunos (67%) responderam com correção à totalidade da questão. A maioria destes alunos, precisamente dez, recorreu ao Teorema de Pitágoras como estratégia para determinar a hipotenusa. Os restantes utilizaram o seno ou o cosseno do ângulo obtido na alínea anterior. Não completaram a resolução sete alunos. Embora, tenham recorrido ao Teorema de Pitágoras não completaram os cálculos, uma vez que já tinha esgotado o tempo regulamentar do recurso à calculadora. Apesar de ser uma situação muito consolidada em anos anteriores, ainda assim, observei que dois alunos não responderam a esta questão.

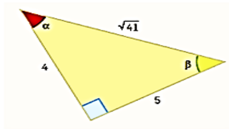
A primeira e segunda questões do caderno 2 eram problemas de escolha múltipla e, apesar de serem diferentes, pretendiam verificar se os alunos sabiam identificar a razão trigonométrica que responderia a cada uma das situações (Figura 80).

5. $\alpha$ e $\beta$ são amplitudes de ângulos agudos.

Qual das seguintes relações é verdadeira?

(A) $sen\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$ e $\cos\beta = \frac{4}{\sqrt{41}}$ (B) $sen\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$ e $tg\ \beta = \frac{4}{5}$

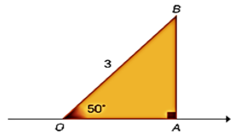
(C) $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$ e $tg\ \beta = \frac{4}{5}$ (D) $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$ e $sen\beta = \frac{5}{\sqrt{41}}$




6. Na figura ao lado estão representados parte da reta real e o triângulo retângulo $[OAB]$.

Sabe-se que:

- o ponto $O$ é a origem;
- o triângulo $[OAB]$ é o triângulo retângulo cujo cateto $[OA]$ está contido na reta real;
- a amplitude do ângulo $AOB$ é $50°$.




Qual das seguintes é a abcissa do ponto $A$?

(A) $3\cos\ (50°)$ (B) $3\,\text{sen}\ (50°)$ (C) $\frac{3}{\text{sen}\ (50°)}$ (D) $\frac{3}{\cos\ (50°)}$

Figura 80 – Questões 5 e 6 da Ficha de avaliação – Caderno 2.

Analisadas as respostas dadas, constatei que vinte e cinco alunos (93%) responderam corretamente à questão 5. Concluí que a grande maioria dos alunos soube identificar e relacionar as amplitudes dos ângulos $\alpha$ e $\beta$ com as correspondentes razões trigonométricas. Relativamente à questão 6, vinte e quatro alunos (89%) responderam corretamente a esta questão. Nesta, os alunos, para além de terem de identificar a razão trigonométrica, tinham também de resolver a proporção de tal forma a encontrar o cateto adjacente. Como tal, o grau de dificuldade desta situação aumentou comparativamente, ao da questão 5. No entanto, tendo em conta os resultados semelhantes obtidos nas duas questões, pude concluir que os alunos souberam utilizar as razões trigonométricas, uma vez que quando confrontados em contextos diferentes souberam aplicá-las.

A questão 7 tinha como objetivo verificar a capacidade dos alunos em operar com valores exatos das razões trigonométricas dos ângulos de $30^0$ e $45^0$ (Figura 81).

7. Calcula o valor exato da expressão seguinte.

$$3\ (cos\ 30°)^2 + 2\ (sen\ 30°)^2 - 3\ tg\ 45°$$

Apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar.

Figura 81 – Questão 7 da Ficha de avaliação – Caderno 2.

Nesta questão, dezoito alunos (67%) responderam corretamente. Existiram no entanto, quatro alunos que apesar de não terem resolvido com correção a totalidade da questão, souberam identificar os valores exatos das razões trigonométricas pretendidas (Figuras 82 e 83). Os restantes alunos não responderam à questão.

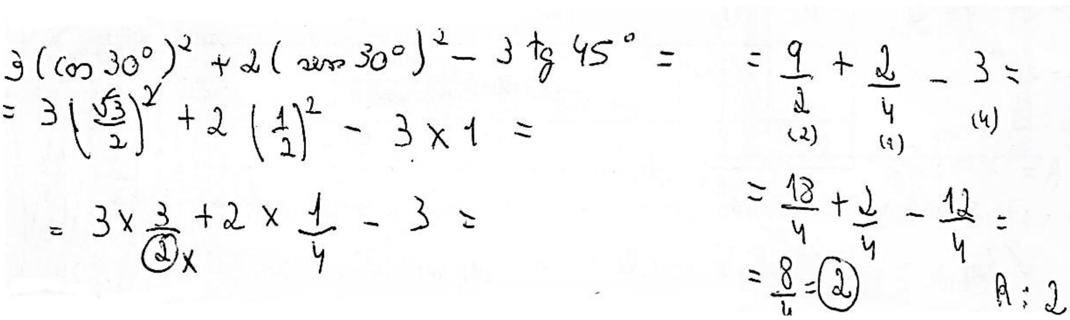



Figura 82 – Resolução de Frederico da Questão 7 da Ficha de avaliação – Caderno 2.

Frederico substituiu corretamente os valores exatos das razões trigonométricas no entanto, cometeu um erro de cálculo quando determinou o quadrado do quociente entre $\sqrt{3}$ e 2. Admiti que o erro cometido se deveu a uma simples distração, uma vez que logo a seguir Frederico determinou corretamente o quadrado do quociente entre 1 e 2.

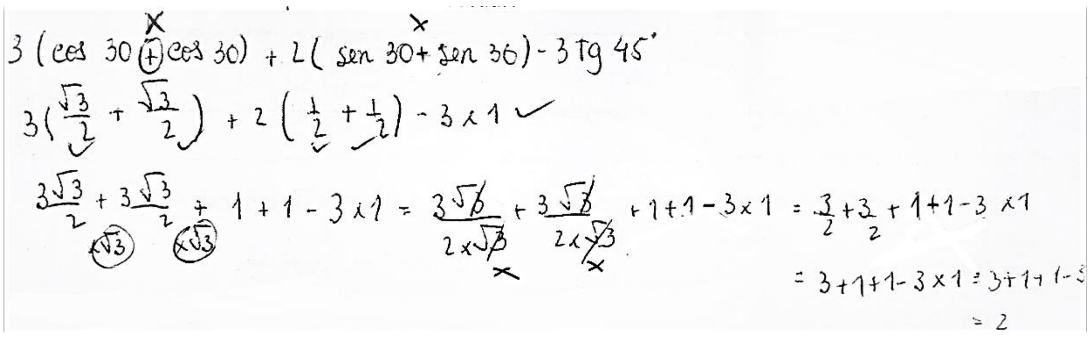



Figura 83 – Resolução de Marta da Questão 7 da Ficha de avaliação – Caderno 2.

Marta, na sua resolução, reconheceu os valores exatos das razões trigonométricas pretendidas mas, cometeu alguns erros de cálculo com alguma gravidade. Por um lado, desenvolveu o quadrado do cosseno e do seno através da soma em vez da multiplicação das bases. Por outro lado, ao multiplicar duas frações pelo mesmo valor não as transformou em frações equivalentes. Marta demonstrou alguma dificuldade nos cálculos numéricos da expressão.

A questão 8 pretendia verificar a capacidade dos alunos na aplicação da fórmula fundamental da trigonometria (Figura 84).

**8.** Justifica se existe um ângulo $\alpha$ de modo que $sen\alpha = \frac{3}{4}$ e $cos\alpha = \frac{1}{4}$

Figura 84 – Questão 8 da Ficha de avaliação – Caderno 2.

Apenas quinze alunos (56%) resolveram na totalidade e com correção esta questão. Observaram-se duas estratégias diferentes, utilizadas por este grupo de alunos. A maioria substituiu na fórmula fundamental da trigonometria os valores dados do seno e do cosseno e obteve uma igualdade falsa. Os restantes esquematizaram um triângulo e verificaram através do Teorema de Pitágoras que os comprimentos assinalados não poderiam corresponder a um triângulo retângulo. Para além destes alunos, observei ainda a existência de seis alunos que utilizaram corretamente a fórmula fundamental da trigonometria mas efetuaram erros de cálculo. Importa referir a existência de duas alunas que mostraram dificuldade na resolução desta questão dado que, não escreveram corretamente a fórmula fundamental da trigonometria (Figura 85). Os restantes quatro alunos não responderam à questão.

$$\underset{\downarrow}{sen\,\alpha} + \underset{\downarrow}{cos\,\alpha} = 1$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{4}{4} = 1$$

$$1 = 1 \text{ } \} \text{ p. Verdadeira}$$

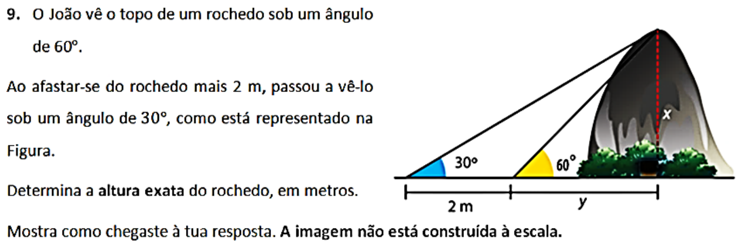
R: Existe um ângulo $\alpha$ com $sen\,\alpha\ \frac{3}{4}$ e $cos\,\alpha = 1/4$

×

Figura 85 – Resolução de Joana da Questão 8 da Ficha de avaliação – Caderno 2.

Joana demonstrou conhecer a existência de uma relação entre o seno e o cosseno de um ângulo agudo. No entanto, não colocou os quadrados nas razões trigonométricas diminuindo assim, o grau de dificuldade da questão. De acordo com o erro cometido, Joana responde corretamente ao que foi solicitado.

A questão 9 da ficha de avaliação tinha o propósito de determinar a altura do rochedo aplicando o uso de duas variáveis e com recurso à trigonometria (Figura 86).



**9.** O João vê o topo de um rochedo sob um ângulo de 60º.

Ao afastar-se do rochedo mais 2 m, passou a vê-lo sob um ângulo de 30º, como está representado na Figura.

Determina a **altura exata** do rochedo, em metros.

Mostra como chegaste à tua resposta. **A imagem não está construída à escala.**



Figura 86 – Questão 9 da Ficha de avaliação – Caderno 2.

Esta questão foi a que os alunos manifestaram mais dificuldade. Assim, apenas onze alunos (41%) responderam corretamente à questão. A estratégia de resolução utilizada por estes consistiu em considerarem os dois triângulos retângulos separadamente e para cada um deles, escreveram a razão trigonométrica da tangente. Em seguida, resolveram um sistema de duas equações, com correção e rigor, utilizando sempre os valores exatos da tangente dos ângulos de $30^0$ e $60^0$. Esta estratégia também foi utilizada por mais nove alunos embora tenham demonstrado alguma dificuldade na manipulação algébrica do sistema de equações (Figura 87).

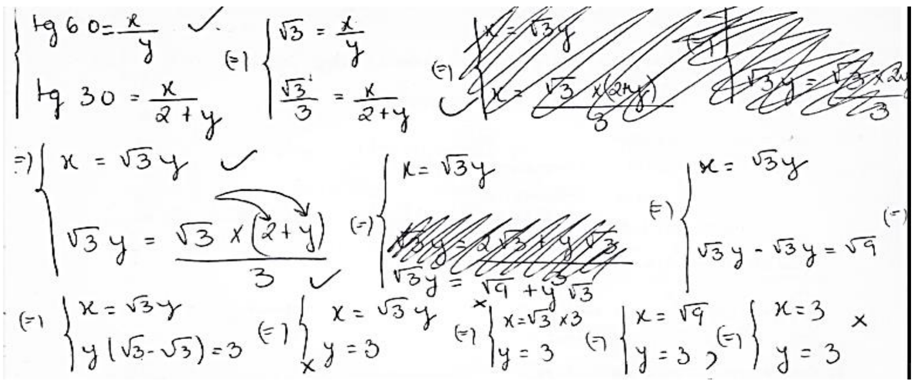


Figura 87 – Resolução de Constança da Questão 9 da Ficha de avaliação – Caderno 2.

Constança elaborou uma estratégia adequada ao equacionar o problema num sistema de duas equações. Mostrou reconhecer qual a razão trigonométrica apropriada em cada uma dos triângulos e além disso, indicou corretamente o valor exato quer da tangente de $60^0$, quer da tangente de $30^0$. Ainda conseguiu resolver uma das equações em ordem a uma das variáveis no entanto, quando a substituiu na outra equação não o fez corretamente. Para além deste erro, Constança mostrou dificuldade na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e ainda na multiplicação de números irracionais. Em suma, concluí que Constança não demonstrou qualquer dificuldade na aplicação da trigonometria em situações de contexto real mas, na manipulação algébrica do sistema.

A questão 10 continha quatro alíneas de escolha múltipla de "Verdadeiro" e Falso". As duas primeiras alíneas pretendiam verificar o reconhecimento da fórmula fundamental da trigonometria. Na terceira alínea, os alunos foram confrontados com a relação existente entre a tangente e o quociente entre o seno e o cosseno. Por fim, a última alínea da questão 10, mostrava a igualdade entre o seno e o cosseno de ângulos complementares (Figura 88).

**10.** Classifica as seguintes igualdades de Verdadeira **(V)** ou Falsa **(F)**

| | | |
|---|---|---|
| V | F | $sen^2(45^0) = 1 - cos^2(45^0)$ |
| V | F | $sen^2(45^0) + cos^2(60^0) = 1$ |
| V | F | $tg30^0 = \frac{cos30^0}{sen30^0}$ |
| V | F | $sen30^0 = cos60^0$ |

Figura 88 – Questão 10 da Ficha de avaliação – Caderno 2.

Das respostas assinaladas verifiquei que vinte e um alunos (78%) responderam corretamente à totalidade da questão. Os restantes alunos mostraram dificuldade em uma ou em duas das alíneas. No entanto, não se verificou a existência de respostas totalmente erradas.

A questão 11, de escolha múltipla, visava a generalização da expressão dada. Os alunos deviam utilizar aprendizagens realizadas, nomeadamente o quadrado de um binómio e a fórmula fundamental da trigonometria (Figura 89).

**11.** Simplificando a expressão $(sen \propto + cos \propto)^2 + (sen \propto - cos \propto)^2$, obtemos:

**(A)** 2 **(B)** $sen^2 \propto - cos^2 \propto$

**(C)** 1 **(D)** 0

Figura 89 – Questão 11 da Ficha de avaliação – Caderno 2.

Analisadas as respostas dadas apurei que vinte e um alunos (78%) responderam corretamente à questão. Apesar de se tratar de uma questão de escolha múltipla, alguns alunos efetuaram o desenvolvimento da expressão solicitada em cálculo auxiliar.

Por fim, importa referir que a classificação do teste foi dividida em quatro menções qualitativas: Insuficiente, cuja percentagem vai até 49%, Suficiente, entre 50% e 69%, Bom, entre 70% e 89% e, por fim, Muito Bom, desde 90% até 100%. A tabela 10 mostra como se distribuíram as classificações.

Tabela 10 – Classificações obtidas na Ficha de avaliação.

| **Menção** | **Insuficiente** | **Suficiente** | **Bom** | **Muito Bom** |
|---|---|---|---|---|
| **Nº de alunos (Percentagem)** | 5 (19%) | 4 (15%) | 7 (26%) | 11 (41%) |

Apesar da existência de cinco alunos com menção insuficiente, considerei os resultados obtidos bastantes bons, uma vez que a maioria dos alunos obteve classificação superior a 70%. Importa destacar que quatro alunos obtiveram 100% na classificação desta ficha.

# Capítulo 6

# CONCLUSÃO

Este capítulo principia com uma síntese do estudo que relembra os objetivos, quadro conceptual, proposta pedagógica e metodologia da investigação. Segue-se um balanço das aulas realizadas, a resposta às questões do estudo e uma sistematização de diversos aspetos que se evidenciaram e são dignos de referência. Por fim, é realizada uma reflexão geral sobre o trabalho efetuado.

## 6.1. Síntese do Estudo

Este trabalho visava compreender como se desenvolve a aprendizagem dos alunos do 9.º ano em Trigonometria. Tinha por base um conjunto de tarefas exploratórias com recurso às TIC, a problemas contextualizados em situações da vida real, à realização de investigações e também sugerindo generalizações enquanto processo-chave do raciocínio matemático.

O quadro conceptual é formado por várias secções relacionadas com o ensino da Trigonometria. A primeira refere-se às Tecnologias na educação e sua importância na diversificação das práticas de ensino. O interesse natural dos alunos pelas tecnologias pode ser utilizado para transformar a sala de aula num espaço de aprendizagem ativa e de reflexão coletiva. Ponte (2000) afirma que as TIC podem ter um impacto muito significativo, uma vez que a sua utilização pode reforçar a importância da linguagem gráfica e de novas formas de representação, bem como valorizar as possibilidades de realização de projetos e atividades de modelação, exploração e investigação. O uso adequado das TIC em contexto educativo permite ao professor diversificar as suas práticas no sentido de promover um ensino moderno e coerente com as constantes mudanças impostas por uma sociedade cada vez mais informatizada.

A segunda secção do quadro conceptual explora a resolução de problemas em situações da vida real. Esta atividade possibilita aos alunos a construção de conceitos, o desenvolvimento da autonomia e a capacidade de contextualizar as situações apresentadas com o mundo à sua volta. Além disso, permite a relacionação dos novos conhecimentos com os conhecimentos já existentes. O programa de Matemática do ensino básico de 2007 (ME, 2007) valoriza a importância da Matemática na vida real e introduz a modelação matemática como uma metodologia de ensino-aprendizagem, que favorece a construção do conhecimento pelo aluno através de problemas de investigação relacionados com a realidade. Esta metodologia obriga a uma grande interação entre professor e aluno, permitindo a este a possibilidade de ser mais ativo, livre e criativo.

A terceira secção destaca a importância da realização de investigações matemáticas pelos alunos. Tal como refere Ponte (2003), investigar corresponde à realização de atividades tais como a formulação de problemas, a exploração de hipóteses, a construção e experimentação de conjeturas bem como a generalização e elaboração de argumentos e demonstrações. Para além das razões apresentadas para a resolução dos problemas, as investigações matemáticas promovem um grande envolvimento dos alunos constituindo um fator de socialização. A investigação matemática é impulsionadora da integração e da troca de ideias entre os intervenientes, funcionando como promotora de um ambiente estimulante e criativo, no qual o aluno tem a liberdade de exibir os seus pensamentos e resoluções aos colegas e ao professor, promovendo deste modo a sua capacidade de comunicação oral e escrita.

Por fim, na quarta secção do quadro conceptual foram analisados três estudos no campo do ensino e aprendizagem da Trigonometria. No primeiro, Lindegger (2000) investigou a utilização de uma abordagem para o ensino da Trigonometria no Triângulo Retângulo, através da manipulação de modelos inseridos em situações-problema. Era sua expetativa que a abordagem estudada servisse como um fator facilitador para a construção dos conceitos da Trigonometria. O autor, embora reconhecendo as limitações da amostra no universo da pesquisa, obteve indícios significativos sobre o processo de ensino-aprendizagem. A conclusão mais relevante foi a de que o processo de construção dos conceitos básicos da Trigonometria através da resolução de problemas concretos, advindos da realidade, caminhando para a resolução de problemas formais, resulta numa aprendizagem mais significativa deste tema. Já Junior (2006) investigou as possibilidades das TIC no ensino da Trigonometria. O centro do estudo foi a resolução de problemas auxiliados pela tecnologia, recorrendo ao *software Cabri-Géomètre II*. O seu objetivo era procurar saber de que modo esta abordagem poderia influenciar o desenvolvimento de estratégias na resolução de problemas de Trigonometria. O autor concluiu que o uso do *Cabri*, no quadro das estratégias educacionais do professor, pode conduzir a aprendizagem significativa, principalmente pela utilização dos recursos de geometria dinâmica e dos recursos de registro. Por último, Miranda (2010) relata uma experiência de ensino da Trigonometria que visava sobretudo compreender de que forma a resolução de problemas, com especial destaque aos que que envolvem situações em contexto real, contribui para a aprendizagem significativa dos alunos. Era seu objetivo incutir nos alunos o gosto pela resolução de problemas através de uma sequência didática e pela cooperação em trabalho de grupo. A autora concluiu que as aulas proporcionadas pelo estudo foram ricas, dado que permitiram que os alunos desenvolvessem o raciocínio matemático perante os problemas propostos e elaborassem estratégias diversificadas de resolução. Além disso, possibilitaram o desenvolvimento da capacidade dos alunos para explicitar o raciocínio utilizado, na procura de uma solução para o problema, tanto oralmente como por escrito.

No presente estudo, a unidade de ensino foi construída tendo por base diversos princípios que surgiram das diretrizes de dois documentos curriculares, o Programa do Ensino Básico (ME, 2007) e o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2007), para além do conhecimento resultante da minha experiência profissional. A proposta fica marcada pelo tipo de tarefa (natureza exploratória com recurso às tecnologias, problemas contextualizados em situações da vida real, bem como a realização de investigações e generalizações) e pelos momentos promovidos para a discussão de estratégias da resolução das tarefas.

O estudo segue uma metodologia de natureza qualitativa, seguindo o paradigma interpretativo baseado na recolha de dados descritivos, provenientes da sala de aula, ambiente natural dos alunos. Esta recolha decorreu no ano letivo de 2017/18, numa turma do 9.º ano. Os métodos e instrumentos usados nesta investigação foram a observação participante e a recolha documental. Os dados foram recolhidos através das produções escritas dos alunos durante a unidade de ensino, de um diário de bordo, de gravações e, ainda, do teste realizado no final da unidade de ensino.

## 6.2. Balanço das aulas realizadas

No decorrer da aula destinada à Tarefa de diagnóstico, alguns alunos mostraram dificuldades iniciais que se prendiam com o uso adequado de simbologia e no domínio da terminologia apropriada para justificar os critérios de semelhança de triângulos. No entanto, a maioria enunciou e aplicou corretamente os critérios de semelhança de triângulos e elaborou estratégias adequadas para determinar a largura de um rio, questão proposta para aplicação da semelhança de triângulos.

Na tarefa realizada com a utilização do software Geogebra, alguns alunos mostraram dificuldade inicial na determinação das razões trigonométricas propostas. Estas dificuldades prenderam-se com a inexperiência em trabalhar com o software. No entanto, o uso do Geogebra tornou a aprendizagem num processo dinâmico em que a experimentação, a formulação de hipóteses e a procura de conjeturas levaram os alunos a construir um modo significativo de pensar matemático. Na verdade, a utilização do Geogebra permitiu aos alunos generalizar a existência de um valor constante das razões trigonométricas de um dado ângulo agudo, bem como a razão pela qual isso acontece. Para além das vantagens apresentadas, a utilização da tecnologia permitiu que alguns alunos com insucesso a Matemática se entusiasmassem pelo trabalho de grupo. Embora continuassem a apresentar dificuldades, estes alunos passaram a participar mais nas aulas, manifestando vontade para irem ao quadro mostrar as suas estratégias de resolução e procuravam perceber as questões que lhes eram colocadas.

A atividade realizada fora da sala de aula, com a manipulação do quadrante, permitiu-me concluir que os alunos valorizaram as aprendizagens matemáticas, uma vez que a diversificação do contexto de aprendizagem permite-lhes uma interação com o meio que os rodeia, motivando o conceito a desenvolver. Esta vantagem pode ser observada durante a aula em causa e nas aulas seguintes. Na resolução de problemas, quer em contexto real, quer em contexto matemático, em que os alunos necessitavam de elaborar uma estratégia, estes recorriam frequentemente à identificação da informação dada e da pretendida. Na maioria dos casos, recorreram à utilização de um desenho assinalando os dados fornecidos, cujo objetivo era o de visualizar a situação. Esta estratégia foi a que os alunos mais utilizaram na determinação dos elementos do triângulo retângulo solicitados. Existiram, no entanto, questões onde os alunos poderiam responder ao pedido utilizando estratégias diferentes, isto é, usando o conhecimento da Trigonometria ou aplicando o Teorema de Pitágoras. A grande maioria optou sempre pelo recurso à Trigonometria até porque compreenderam que este caminho implicava um menor número de cálculos e, consequentemente, ganhando tempo para resolver mais problemas. Nas aulas dedicadas à consolidação das aprendizagens realizadas pude constatar que a maioria dos alunos indicou, sem qualquer dificuldade, a razão trigonométrica que melhor se adequava às situações propostas.

Durante as aulas dadas para a resolução de problemas, os alunos puderam usar a calculadora. Este recurso revelou-se muito útil não só por permitir aos alunos efetuar cálculos com facilidade mas também pela possibilidade de questionar a veracidade dos resultados obtidos.

As maiores dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de problemas não estiveram ligadas ao tema da Trigonometria mas no uso de conhecimentos anteriores. Isto é, os alunos, quando confrontados com um problema, identificavam corretamente a razão trigonométrica e elaboravam uma estratégia correta, mas apresentavam erros de manipulação algébrica das equações resultantes da estratégia definida. Importa destacar que um número significativo de alunos mostrou grande capacidade de elaborar uma estratégia adequada e responder corretamente às questões solicitadas. Também no decurso dos diálogos estabelecidos, sobressaiu a capacidade de argumentação de alguns alunos, face a erros cometidos pelos colegas e na justificação de estratégias elaboradas.

Durante a aula dedicada às relações existentes entre as razões trigonométricas, todos os alunos conseguiram generalizar que a tangente de um ângulo agudo é dada pelo quociente entre o valor do seno e do cosseno desse ângulo. No entanto, alguns alunos evidenciaram dificuldade quando lhes foi solicitada a generalização da fórmula fundamental da trigonometria. A dificuldade manifestada prendeu-se com a tradução de linguagem natural para linguagem simbólica. Ultrapassada esta dificuldade, os alunos generalizaram para qualquer valor de $\alpha$ que a soma entre o quadrado do seno e o quadrado do cosseno é igual a um. A provar esta afirmação, nas questões em que se pretendia a aplicação da fórmula fundamental da trigonometria, a maioria dos alunos usou esta relação ainda que alguns tenham recorrido ao Teorema de Pitágoras como estratégia de resolução. Também na generalização do valor de expressões algébricas para qualquer valor de $\alpha$, alguns alunos, apesar de compreenderem que, para generalizarem para qualquer valor, não podiam substituir razões por valores numéricos, ainda assim recorreram a substituições. As dificuldades destes alunos prenderam-se essencialmente com aprendizagens anteriores, nomeadamente o desenvolvimento do quadrado do binómio e a propriedade distributiva da multiplicação.

Os alunos manifestaram dificuldade na manipulação algébrica do Teorema de Pitágoras utilizando mais do que uma variável. Aos alunos foi solicitado que obtivessem os valores das razões trigonométricas dos ângulos de $30^0, 45^0\ e\ 60^0$. Para tal seria necessário a aplicação do Teorema de Pitágoras para determinar a diagonal de um quadrado de lado $a$ e a altura de um triângulo equilátero de lado $x$. No primeiro caso, os alunos manifestaram dificuldade na aplicação das propriedades da simplificação de raízes quadradas. Esta dificuldade foi ultrapassada, uma vez que a maioria dos alunos conseguiu sem qualquer ajuda determinar a altura, pelo mesmo processo, do triângulo equilátero de lado desconhecido. Importa salientar que durante a determinação das razões seno e cosseno do ângulo de $60^0$ alguns alunos referiram simplesmente a relação existente entre as razões trigonométricas dos ângulos complementares. Este tipo de justificação apresentada revela uma boa articulação de conhecimentos na aprendizagem da Trigonometria.

Os resultados da ficha de avaliação permitem tirar conclusões idênticas às que decorrem da aplicação das tarefas. Na quase totalidade das questões, a maioria dos alunos identificou corretamente a razão trigonométrica, elaborou uma estratégia de resolução e respondeu corretamente aos problemas. A única exceção encontrada respeita à questão, cuja estratégia passava pela resolução de um sistema de equações. Neste caso, os alunos mostraram dificuldade na sua manipulação algébrica. Esta dificuldade poderia ter sido ultrapassada se tivesse existido mais tempo dedicado à consolidação dos procedimentos necessários para a sua resolução. Também constatei a capacidade de generalização e de justificação dos alunos em situações que envolviam as relações existentes entre as razões trigonométricas.

### 6.3. Resposta às Questões de Estudo

Neste ponto apresento as principais conclusões do estudo em função das questões de investigação, indicando (i) o modo como os alunos desenvolveram e relacionaram conceitos trigonométricos quando usaram as TIC; (ii) a capacidade de generalização e justificação que os alunos mostraram em Trigonometria; (iii) quais as estratégias usadas e que dificuldades manifestaram os alunos para resolver as tarefas propostas sobre Trigonometria, contextualizadas na realidade.

*Questão 1.* A análise dos dados, permitiu identificar o contributo das TIC como ferramenta na elaboração de situações de aprendizagem ricas em possibilidades de construção do conhecimento, nomeadamente a visualização e compreensão dos conceitos trigonométricos. O *software Geogebra*, a folha de cálculo *Excel* e a calculadora foram ferramentas úteis no apoio ao desenvolvimento do raciocínio matemático e à resolução de problemas. Da observação feita aos alunos ao realizarem as tarefas com o auxílio do *Geogebra*, apurei algumas conclusões no que toca às suas vantagens. Atendendo à sua dinâmica e interatividade, as construções efetuadas pelos alunos, bem como a manipulação das figuras por eles apresentadas, promoveram dinamismo nas atividades, possibilidades de realização de tentativas, confirmação de hipóteses e observação de relações entre comprimentos dos lados e amplitude dos ângulos. O *Geogebra* possibilitou uma exploração visual das figuras construídas que não seria possível com figuras estáticas, feitas com régua e compasso. Este conjunto de vantagens permitiu aos alunos a identificação das razões trigonométricas, bem como a capacidade de raciocínio sobre a generalização da existência de triângulos semelhantes e da constância dos quocientes propostos. Ao realizarem sucessivas tentativas e experiências, através do processo de arrastar as figuras pelo écran do computador, verifiquei um significativo poder de argumentação dos alunos face às conjeturas formuladas. Os alunos, com facilidade, generalizaram que o valor dos quocientes não depende do valor dos comprimentos dos lados mas é dependente da amplitude dos ângulos. Esta interpretação é proporcionada pelas justificações apresentadas pelos alunos ao longo da aplicação da sequência didática, sempre que lhes era solicitado o valor de razões trigonométricas de triângulos semelhantes a um dado triângulo do qual já conheciam as respetivas razões. De um modo geral, os alunos demonstraram boa capacidade de relacionação nas situações-problema que envolviam o cálculo das razões trigonométricas. A utilização deste recurso alterou também a visão anterior que alguns alunos tinham da Matemática. Com o uso desta ferramenta tecnológica reconheço que não alterei só o modo como ensinava, mas também a minha visão do que os alunos são capazes de aprender.

De entre os recursos tecnológicos utilizados, a folha de cálculo Excel, usada na construção da tabela trigonométrica, permitiu aos alunos um contacto mais próximo com os valores das razões trigonométricas de qualquer ângulo agudo. Por um lado, os alunos observaram que quer o seno, quer o cosseno tinham valores compreendidos num intervalo entre zero e um, enunciando, logo de seguida, uma justificação correta para o facto. A justificação que elaboraram foi baseada, não só em aprendizagens realizadas em anos anteriores mas também, no conhecimento das razões trigonométricas. Por outro lado, os alunos apuraram, quase de imediato, a igualdade existente entre os valores do seno e do cosseno de ângulos complementares. Isto proporcionou-lhes a elaboração de estratégias para determinar e justificar, posteriormente, o valor exato dos ângulos agudos de referência, isto é, ao determinarem o seno de $45^0$ justificaram que era igual ao cosseno do mesmo ângulo por se tratarem de ângulos complementares, reduzindo significativamente o número de cálculos a efetuar. Do mesmo modo, os alunos desenvolveram a capacidade de compreensão relativamente às razões trigonométricas do seno e do cosseno de $30^0$ e $60^0$.

Ao longo da resolução das tarefas, os alunos puderam usar a calculadora. De entre as muitas vantagens reconhecidas ao uso da calculadora, saliente-se a possibilidade que este recurso tecnológico concedeu aos alunos no desenvolvimento do poder de argumentação face a diferentes valores obtidos para supostas “entradas iguais”. A reflexão e a discussão acerca dos resultados obtidos para diferentes unidades das amplitudes dos ângulos auxiliaram os alunos a desenvolver uma compreensão mais profunda dos conceitos trigonométricos. A utilização da calculadora abriu várias possibilidades na resolução de problemas, dado que os alunos puderam elaborar e explorar estratégias não só na resolução pelo processo de tentativa e erro, mas também na formulação e verificação de conjeturas, desenvolvendo assim o seu raciocínio. A possibilidade de refazer cálculos com maior rapidez proporcionou economia de tempo que foi utilizado pelos alunos na elaboração de estratégias de resolução de problemas e nas suas discussões. Segundo Ponte (1989), o uso da calculadora não anuncia o fim do cálculo, mas origina que o cálculo seja visto de outra maneira.

Estes resultados vão de encontro ao que afirma o NCTM (2007), a "tecnologia não só influencia o modo como a matemática é ensinada e aprendida, como também afeta o que é ensinado e o momento em que determinado tema é abordado" (p. 28) justificando que os alunos devem poder usar regularmente as tecnologias que servem de apoio e enriquecem a construção de sentido matemático, o raciocínio, a resolução de problemas e a comunicação (NCTM, 2011).

*Questão 2.* A análise dos dados permitiu identificar o contributo das tarefas, com uma abordagem de ensino exploratório, para a mobilização da capacidade de generalização e justificação que os alunos mostraram em Trigonometria. Tendo como ponto de partida o auxílio do Geogebra, os alunos, utilizando as suas capacidades, isto é, movendo muitas vezes o triângulo inicialmente construído, generalizaram a igualdade das razões trigonométricas para triângulos semelhantes. Deste modo, puderam justificar os seus raciocínios com a utilização de casos particulares, procedimento importante no processo de generalização. Este tipo de raciocínio é semelhante ao dos alunos do estudo de Blanton e Kaput (2005). No entanto, ao longo das tarefas, alguns pares de alunos mostraram a necessidade de partir de casos particulares para justificarem igualdades propostas com as razões trigonométricas, ainda que, em algumas situações foi conveniente sensibilizá-los para efetuarem as justificações das igualdades propostas para qualquer ângulo agudo, não podendo recorrer à utilização de casos particulares.

Refira-se a existência de alguns pares de alunos que, desde o início do estudo, manipularam variáveis algebricamente e formularam generalizações e justificações adequadas para os seus raciocínios. Os momentos de discussão coletiva foram marcantes no aparecimento de desacordos e na formulação de justificações e generalizações por parte dos alunos. Neste caso, o papel do professor é importante para impulsionar uma cultura de sala de aula que estimule os alunos para partilharem as suas justificações e encorajá-los na formalização de generalizações. Ao longo da resolução das tarefas, nos momentos de discussão coletiva, encorajei os alunos a levantar questões, a justificarem os seus raciocínios, a formularem hipóteses e a partilharem as suas generalizações com os restantes elementos da turma. Este conjunto de ações permitiu aos alunos explorarem possíveis causas para justificarem erros, elaborarem conjeturas e formularem generalizações destacando a generalização da Fórmula Fundamental da Trigonometria e a justificação de que a tangente de um ângulo agudo é igual à razão entre os respetivos seno e cosseno, tão importantes no conteúdo da Trigonometria. Destaca-se que as atividades desenvolvidas ofereceram situações importantes de aprendizagem, ativadas por discussões e reflexões na sala e aula, tal como é proposto na abordagem exploratória (Ponte, 2014).

Em suma, à luz dos resultados, constatei que os alunos apresentaram evidências de raciocínios relevantes, apresentaram capacidade de justificar e generalizar em Trigonometria.

*Questão 3.* A seleção das tarefas para a experiência de ensino teve também em atenção aspetos que pretendia observar e valorizar, nomeadamente quais as estratégias que os alunos utilizam e que dificuldades manifestam para resolver as tarefas propostas sobre Trigonometria, contextualizadas na realidade. Os resultados mostram que a seleção e diversificação de tarefas, tendo em conta o objetivo pretendido, resultaram numa aprendizagem significativa. Durante a unidade de ensino, os alunos foram confrontados com contextos e tarefas diversificadas o que contribuiu para o aparecimento de um leque variado de estratégias. No entanto, a maioria dos alunos na resolução de tarefas contextualizadas na realidade, apresentava a informação dada sob a forma de um esquema e elaboravam uma estratégia de resolução baseada na resposta a três questões norteadoras: (i) O que me dão? (ii) O que me pedem? (iii) Que relação existe entre o que me dão e o que me pedem? Este tipo de raciocínio capacitou os alunos, na sua maioria, de fazerem uma escolha adequada da razão trigonométrica que permitia resolver os problemas propostos e, consequentemente a elaboração de uma estratégia capaz para os resolver. De facto, ao longo das tarefas propostas, constatei que a maioria dos alunos formulava uma estratégia de resolução reconhecendo a informação dada e solicitada, seguida da identificação da razão trigonométrica e respetiva equação algébrica que iria resolver o problema. No entanto, as maiores dificuldades surgiram na manipulação algébrica da equação enunciada. Estas dificuldades foram sendo diluídas com o aparecimento de inúmeras questões/exercícios propostas aos alunos, intercaladas com as tarefas propriamente ditas. O uso destes dois contextos diferentes complementaram-se e contribuíram para o aparecimento de estratégias diferentes e cada vez mais complexas. Tornam-se também alvo de referência as vantagens de ter possibilitado aos alunos uma aula no exterior, com a manipulação do quadrante e com o contacto com o meio que os rodeia. Esta serviu de alavanca motivacional para as tarefas propostas em contexto real, uma vez que os alunos puderam verificar, na prática, a utilidade da Trigonometria no dia-a-dia. Os alunos envolveram-se, de forma muito positiva, na sua própria aprendizagem e reforçaram a ideia de que não existe uma atividade sem um motivo. Desta forma, sempre que os alunos eram confrontados com situações cujas estratégias de resolução podiam recair sobre dois processos distintos (Teorema de Pitágoras e Trigonometria) os alunos, na sua maioria, optavam pela Trigonometria muito devido à tarefa exposta. Nas tarefas de grau cognitivo mais elevado, nomeadamente as tarefas em que era exigida a manipulação do Teorema de Pitágoras com mais do que uma variável, denotou-se alguma dificuldade por parte de alguns alunos. Contudo, não atribuí à Trigonometria a responsabilidade das dificuldades manifestadas mas sim a aprendizagens não consolidadas anteriormente bem como, à complexidade do pensamento algébrico deste tipo de questões, o que condicionou o aparecimento destas dificuldades.

Em jeito de conclusão, reconheci que as tarefas desenvolvidas, na lógica do ensino exploratório, ajudaram os alunos a construir noções, estabelecer relações, calcular distâncias, determinar amplitudes de ângulos, formular conjeturas e efetuar generalizações. Deste modo, evidenciou-se a capacidade dos alunos a tornarem-se cada vez mais autónomos na realização das tarefas, no desenvolvimento de estratégias de exploração e construção, e não apenas na memorização de fórmulas e procedimentos.

### 6.4. Balanço do estudo

A realização deste trabalho contribuiu de forma significativa para enriquecer a minha forma de lecionar no futuro, pois permitiu-me vivenciar e observar as vantagens que uma mudança na estrutura das aulas e das tarefas propostas podem trazer para a aprendizagem dos alunos. Constatei a importância do professor desenvolver a sua criatividade na construção de tarefas que proporcionem a oportunidade de envolver ativamente os alunos na resolução de problemas, na discussão de resultados e das respetivas estratégias de resolução, não só na Trigonometria mas também nos outros temas matemáticos. Desta forma, este estudo influenciou a minha prática docente levando-me a pensar num ensino diferenciado, a elaborar, a criar alternativas de ensino para as minhas outras turmas, não só para o 9.º ano como também para os outros anos de escolaridade.

Não posso deixar de referir que a turma contribuiu fortemente para que o estudo, no meu ponto de vista, tivesse sido tão rico. Os alunos foram muito recetivos a algumas alterações ao modo como estavam habituados a trabalhar. Apesar de estarem familiarizados a trabalhar em pares, mostravam não valorizar muito esta forma de trabalho cooperativo, existindo um ambiente de competição. No entanto, a partir do momento em que lhes expliquei que neste estudo necessitaria de observar comportamentos de ajuda e de respeito pelas dúvidas que fossem surgindo, a atitude face ao espírito competitivo alterou-se. Ainda sobre este assunto, verifiquei alterações no modo como os alunos intervinham durante as discussões coletivas. Os que tinham a capacidade de elaborar corretamente uma estratégia para a resolução dos problemas respeitavam as estratégias incorretas dos colegas, ajudando-os e colocando questões de modo a induzir aqueles que tinham mais dificuldade à compreensão do erro. Devo também referir o cumprimento e respeito dos alunos pelos tempos atribuídos na execução das tarefas, inclusivamente quando lhes foi solicitado iniciar a aula mais cedo ou sempre que a aula se prolongava um pouco mais. Também o dinamismo e motivação dos alunos, nas tarefas que envolveram as tecnologias e a que foi realizada fora da sala de aula, serviram como uma alavanca motivacional também para mim. Enquanto professora valorizo a importância dos alunos trabalharem em diversos contextos (Skovsmose, 2000), considerando estes como um suporte para a aprendizagem da Matemática (Ponte & Quaresma, 2012).

A proposta de incorporar o uso calculadora, relacionando a Matemática com as práticas que se evidenciam no dia-a-dia do aluno, constitui um convite a professores preocupados em minimizar a problemática instaurada entre ensino de matemática e os mitos que perduram sobre o uso desta ferramenta, que quando devidamente apresentada e explorada acaba por potencializar o desenvolvimento das aprendizagens matemáticas, mostrando, assim, aos alunos e a si mesmo que tal incorporação não limita a aprendizagem significativa e tampouco a construção do conhecimento matemático.

Não posso deixar de referir um aspeto menos bom no desenvolvimento do estudo, a questão do tempo. Apesar de este não ser o único e principal fator inibidor das aprendizagens, torna-se fundamental afirmar que muitos dos momentos de dificuldade que alguns alunos evidenciaram, seriam melhor resolvidos caso houvesse mais tempo para reforçar as aprendizagens anteriores nas quais apresentavam dificuldades de aplicação e que comprometiam o trabalho subsequente. Apesar disto, os alunos que evidenciaram sempre alguma desmotivação relativamente à Matemática, revelaram agora uma maior predisposição e envolvimento no trabalho a desenvolver. Assim, caso houvesse mais tempo disponível, poderia ter aproveitado para consolidar com estes alunos conteúdos que mostravam não dominar e tirar maior proveito da motivação evidenciada face às tarefas propostas.

Considero que a componente da investigação matemática deveria ser transversal a todo o trabalho promovido na escola, quer por professores quer pelos alunos, mas a pressão do currículo nacional, da planificação anual e dos manuais ainda é demasiado sentida no trabalho diário, estando todos os intervenientes ainda excessivamente centrados no ensino, em detrimento da aprendizagem.

Este trabalho, por natureza, encerra um ciclo, mas a sua discussão não pode de modo algum terminar aqui. Os resultados mostraram que é possível permitir uma direção para o ensino de Matemática que promova uma aprendizagem que seja significativa e crítica para o aluno. Nas palavras de Klein, "Contribui para uma educação inovadora humana que desperta, no estudante, o interesse em participar na aula, transforma a sala de aula num rico laboratório, provocando o seu crescimento pessoal e cognitivo, considerando o aluno como um ser ativo, durante todo o processo" (2009, p. 95).

Espero, com este trabalho, continuar a enriquecer a minha prática letiva e contribuir um pouco para o desenvolvimento da Educação Matemática, na expetativa que as reflexões por ele propostas alcancem um número cada vez maior de alunos e professores.

## REFERÊNCIAS


Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática Experiência do projecto MAT 789* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Abrantes, P., Leal, L. C., & Ponte, J. P. (Eds.). (1996). *Investigar para aprender matemática*. Lisboa: APM e Projecto MPT.

Abrantes, P., Ponte, J. P., Fonseca, H., & Brunheira, L. (Eds.). (1999). *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM e Projecto MPT.

Adler, P. A., & Adler, P. (1994). Observational techniques. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 377–392). Thousand Oaks, CA: Sage.

Alro, H., Skovsmose, O. (2006). *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática*. Tradução: Orlando de A. Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica.

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(3), 331-364.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of socialinteraction:Thecaseofmathematical proof. Em A. Bishop&S. Mellin-Olsen &J. v. Dormolen (Eds.). *Mathematical knowledge: lts gmwth through teaching* (pp. 175-1 92). Dordrecht; Kluwer.

Barbosa, J. (2001). Modelagem na educação matemática: Contribuições para o debate teórico. *Anais da 24ª Reunião da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação.* Retirado em 10 de fevereiro de 2018, de http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_I/modelagem_barbosa

Barbosa, J. (2003). Modelagem matemática na sala de aula. *Perspectiva*, Erichim (RS), 27 (98), 65-74.

Bishop, A. J., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A.G. Howson & M. Otte (Eds.). *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.

Blanton, M. L. (2008). Algebra and the elementary classroom. *Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann: Portsmouth, NH.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412–446.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization.* A global dialogue from multiple perspectives (pp. 5-23). Berlin: Springer.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W., & Niss, M. (Eds.) (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer.

Blum, W., & Ferri, B. (2009). Mathematical modelling: can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, *1*(1), 45-58.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Colecção Ciências da Educação. Porto: Porto Editora.

Borba, M. C., & Penteado, M. G. (2001). *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3–22.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*, 355–374.

Chamoso, J., & Rawson, W. (2001). En la búsqueda de lo importante en el aula de matemáticas. *SUMA*, 36, 33–41.

Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores: Os desafios da aprendizagem permanente*. Porto. Porto Editora.

Fernandes, M. (2002). Métodos de avaliação pedagógica. Em P. Abrantes e F. Araújo (Coords.), *Avaliação das aprendizagens. Das concepções às práticas.* Lisboa: Ministério da Educação.

Ellis, A. (2007). A Taxonomy for Categorizing Generalizations: Generalizing Actions and Reflection Generalizations, *Journal of the Learning Sciences*, 16:2, 221-262.

Ellis, A. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(4), 308-345.

Ferri, B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. ZDM, *38*(2), 86-95.

Flick, U. (2005). *Métodos qualitativos na investigação científica*. Lisboa: Monitor.

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225–256). Charlotte, NC: Information Age.

Guba, E., & Lincoln, Y. (1981). *Effective evaluation*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Guerreiro, A. (2011). *Comunicação no ensino-aprendizagem da matemática: Práticas no 1.º ciclo do ensino básico* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Gravina, M. A. (2001). Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo (Tese de Doutoramento, UFRGS, Porto Alegre).

Gravina, M. A., & Santarosa, L. M. (1998). A aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. IV Congresso RIBIE. Brasília. Retirado em 14 de novembro de 2017 em http://dx.doi.org/10.22456/1982-1654.6275

Haines, C., Galbraith, P., Blum, W., & Khan, S. (Eds) (2011). Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics. Oxford : Woodhead Publishing.

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempo de mudança: O trabalho e a cultura dos professores na idade pós moderna*. Lisboa: Mc Graw-Hill.

Henriques, A. C. C. B. (2010), *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação* (Tese de doutoramento, Educação (Didáctica da Matemática), Universidade de Lisboa, Instituto de Educação).

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation: A methodology for human studies.* London: Sage.

Júnior, C. S. (2006). *Um estudo exploratório sobre o uso da informática na resolução de problemas trigonométricos* (dissertação de mestrado, UNESP, Bauru, Brasil). Retirado em 26 de fevereiro de 2018 de https://repositorio.unesp.br/handle/11449/90873

Jurkiewicz, S., & Friedman, C. (2010). Modelagem matemática na escola e na formação do professor – uma abordagem abrangente. *Educação e Matemática*, 106, 43-47.

Kaiser, G., Blum, W., Ferri, R., & Stillman, G. (Eds) (2011). Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. New York: Springer

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. (pp. 5–17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Klein, M. E. Z. (2009). *O ensino da trigonometria subsidiado pelas teorias da aprendizagem significativa e dos campos conceituais* (Dissertação de mestrado, PUC, Porto Alegre). Retirado em 20 de julho de 2018 de http://tede2.pucrs.br/tede2/handle/tede/3357

Lannin, J., Ellis A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade* 8. Reston, VA: NCTM

Lindegger, L. R. M. (2000). *Construindo os conceitos básicos da Trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos* (Dissertação de mestrado, PUC, São Paulo, Brasil). Retirado em 26 de fevereiro de 2018 de https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11216

Lo, J., & Wheatley, G. H. (1994). Learning opportunities and negotiating social norms in mathematics class discussion. *In Educational Studies in Mathematics*, 27, pp. 145-164.

Lüdke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: E.P.U.

Marshall, C., & Rossman, G.B. (2006). *Designing qualitative research* (4th Ed). London: Sage.

Martins, C., Maia, E., Menino, H., Rocha, I., & Pires, M. V. (2002). O trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da Matemática. Em J. P. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 59–81). Coimbra: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Aproaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordretch, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mata-Pereira, J. (2018). *As ações do professor para promover o raciocínio matemático na sala de aula*. (Tese de doutoramento, Educação (Didáctica da Matemática), Universidade de Lisboa, Instituto de Educação).

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico* (PMEB). Lisboa: Ministério da Educação.

MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico* (PMCM). Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Mendes, I.A. (2009). *Matemática e investigação em sala de aula: Tecendo redes cognitivas na aprendizagem*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Mendonça, L., & Lopes, C. (2011). Modelagem Matemática: um ambiente de aprendizagem para a implementação da Educação Estatística no Ensino Médio. *Bolema*, 24(40), 701-724.

Menezes, L. (2013). Utilização de Casos Multimédia na Formação Matemática de Professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico 1 : Impacto no Conhecimento e Prática de Ensino Supervisionada. *Revista Educação Matemática em Foco, pp. 24-46.*

Merriam, S. (1988). *Case study research in Education.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Mestre, C. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino.* (Tese de doutoramento, Educação (Didáctica da Matemática), Universidade de Lisboa, Instituto de Educação).

Miranda, C. J. V. (2010). *A aprendizagem da Trigonometria do triângulo rectângulo através da resolução de problemas* (Relatório da prática de ensino supervisionada, Mestrado em Ensino da Matemática, Universidade de Lisboa). Retirado em 20 de dezembro de 2017 de http://hdl.handle.net/10451/3927

Nathan, M., & Knuth, E. (2003). A study of whole classroom mathematical discourse and teacher change. *Cognition and Instruction, 21*(2), 175–207.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1980). *An agenda for action*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM 1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: IIE e APM.

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática.* Lisboa: APM e IIE.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM).

National Council of Teachers of Mathematics (2011). Supporting Mathematical Reasoning and Sense Making for English Learners. In *Focus in High School Mathematics: Fostering Reasoning and Sense Making for All Students*, edited by Marilyn E. Strutchens and Judith Reed Quander, pp. 17-36. Reston, VA.: NCTM.

Oliveira, R. T. (2007). *Informática Educativa. Dos planos e discursos à sala de aula*. Campinas Papirus.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 22(2), 28-53.

Oliveira, C., & Oliveira, H. (2012). Modelação Matemática no Ensino Profissional: Construção e Exploração de uma tarefa. Investigação em Educação Matemática 2012 - *Práticas de ensino da Matemática* 1, 105-119.

Orton, A. (2004). Learning mathematics: Issues, theory and classroom practice. (3rd edition). London: Continuum.

Papert, S. (1994). *A máquina das crianças*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (1994). *A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático.* Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P. (1989). A calculadora e o processo de ensino-aprendizagem. *Revista Educação e Matemática.* Lisboa, 11, 1-2.

Ponte, J. P. (2000). Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: Que desafios? *Revista Iberoamericana de Educación*, *24*, 63-90. Retirado em 14 de novembro de 2017 de http://hdl.handle.net/10451/3993

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional (*pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. ZDM: *International Journal on Mathematics Education*, 39(5-6), 419-430.

Ponte, J. P. (Org.) (2014). *Práticas profissionais dos professores de matemática*. Lisboa : Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P., Brocardo, J.; Oliveira, H. (2006). *Investigação matemática na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., Brocardo, J., Oliveira, H. (2009). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante*, 13(2). Retirado em 2 de janeiro de 2018 de http://hdl.handle.net/10451/2983

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2012). *O papel do contexto nas tarefas matemáticas*. Interacções, *22*, 196-216.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Roldão, M. C. (2007). Colaborar é preciso: Questões de qualidade e eficácia no trabalho dos professores. *Noesis*, 71, 24-29.

Serrazina, L. (1998). *Teacher's professional development in a period of radical change in primary mathematics education in Portugal*. Tese de Doutoramento. APM: Lisboa.

Skovsmose, O. (2000). *Landscapes of investigation*. Bolema, 14, 66-91.

Skovsmose, O. (2001). *Landscapes of investigation*. *ZDM*, 33(4), 123-132.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340.

Stein, M. K., & Kim, G. (2008). The role of mathematics curriculum materials in large-scale urban reform: an analysis of demands and opportunities for teacher learning. In J. Remillard, B. Herbel-Eisenmann & G. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 37-55). New Yor, NY: Routledge.

Stein, M. K., & Lane S. (1996). Instuctional tasks and the development ok student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, 2, 50-80.

Stender, P. (2012). Facilitating complex modelling activities - the role of the teacher. In ICME (Ed.), *12th International Congress in Mathematics Education* (12th ICME) (pp. 3423-3430). Seoul: ICME.

**ANEXOS**

**Anexo 1 – Autorização da Escola**

Santarém, 2 de dezembro de 2017

Exma. Sra. Diretora do Agrupamento de Escolas Sá da Bandeira

Eu, Sandra Maria Abrantes Cardoso Leitão, docente de Matemática na Escola D.João II, venho por este meio solicitar autorização para concretizar na turma 9ºB, o trabalho que dará suporte ao meu estudo de Mestrado, a desenvolver sob orientação do Professor João Pedro da Ponte sobre o tema "Investigações e Tecnologias no Ensino da Trigonometria – Uma Experiência no 3º Ciclo". Este trabalho integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Educação na Área de Especialização em Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

No decorrer do trabalho as principais formas de recolha de dados para a concretização do mesmo serão: observação das aulas, gravações aúdio/vídeo, narração escrita de momentos das aulas, entrevistas/questionários aos alunos e recolha de trabalhos produzidos pelos alunos. Será solicitada autorização aos Encarregados de Educação dos alunos para a participação neste trabalho e será salvaguardado o anonimato.

Grata pela colaboração e com os melhores cumprimentos,

Pede deferimento,

____________________________________________

(Sandra Maria Abrantes Cardoso Leitão)

Com o conhecimento do Orientador

________________________________

(João Pedro da Ponte)

**Anexo 2 – Autorização dos Encarregados de Educação**

Santarém, 12 de dezembro de 2017

Exmo.(a). Sr.(a). Encarregado(a) de Educação:

Consciente de que o trabalho de professor não é estático e deve estar num ciclo constante de melhoria e de reflexão sobre as suas práticas, ao longo do tempo, duas décadas de trabalho, pesquisei bastante, frequentei inúmeras ações de formação contínua, o que motivou à inscrição no Mestrado de Didática da Matemática sendo o Trabalho de Projeto desenvolvido no tema da Trigonometria.

Estou consciente, enquanto docente, que as dificuldades que os alunos têm no conteúdo referido, devem-se à introdução do tema geralmente sem qualquer ligação à vida real. Assim, e para colmatar as dificuldades apresentadas, irei apoiar o meu trabalho na criação de uma sequência de tarefas promotoras do desenvolvimento matemático dos alunos.

Para concretizar este propósito será necessário proceder à recolha de tarefas realizadas pelos alunos nas aulas, à narração de aulas, à possível realização de pequenos questionários/entrevistas escritas aos alunos e à gravação-vídeo de algumas aulas(1).

A utilização destas gravações será unicamente para este fim.

Assim sendo, e tendo em conta que é garantido o anonimato dos alunos, torna-se fundamental ter o seu consentimento para a participação do seu educando neste estudo.

Por fim informo que estou à sua inteira disposição, para prestar qualquer tipo de esclarecimento.

Agradeço a sua colaboração.

Com os melhores cumprimentos

A professora de Matemática,

______________________

Email: sandra.leitao@agrupamentosabandeira.pt

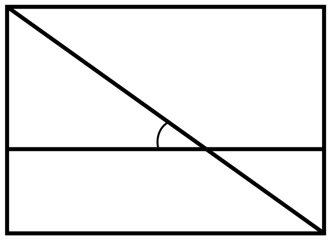
(Recortar por aqui) -------------------------------------------------------------------------------------

Declaro que concordo que o meu educando_____________________________ número _____ da turma 9ºB da Escola D.João II, participe neste estudo desenvolvido pela professora Sandra Leitão.

(1)Autorizo/Não autorizo a gravação vídeo das aulas (riscar o que não interessa)

Data:_____________Assinatura: ____________________________________

**1.** Na figura, está representado um retângulo [*ABCD*]. A figura não está desenhada à escala.



Sabe-se que:

• os pontos *E* e *G* pertencem aos lados [*AD*] e [*BC*], respetivamente;

• o segmento [*EG*] é paralelo ao segmento [*AB*];

• o segmento [*BD*] interseta o segmento [*EG*] no ponto *F;*

• $\overline{EF}$ = 5 cm • $\overline{FG}$ = 3 cm • $\overline{ED}$ = 3,5 cm

**1.1.** Admite que $D\hat{F}E = 35°$. Qual é a amplitude, em graus, do ângulo *BFG?* Mostra como chegaste à tua resposta.

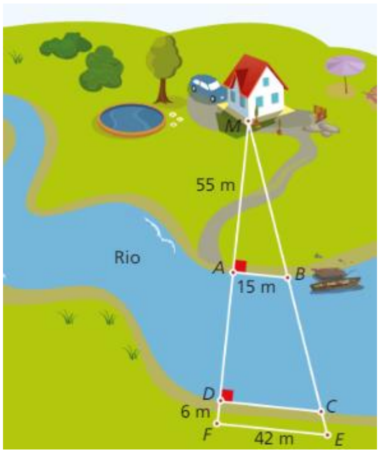
**1.2.** Os triângulos [*EFD*] e [*GFB*] são semelhantes. Justifica.

**1.3.** Determina $\overline{BG}$. *Mostra como chegaste à tua resposta.*

Adaptado do Teste Intermédio de Matemática, 8ºano, maio2011

**2. A largura do rio**

O Fernando pretende determinar a largura do rio. Numa margem colocou estacas nos pontos A, B e M, e na outra colocou estacas nos pontos F e E, de modo que $[EF]$ fosse paralelo às margens do rio.

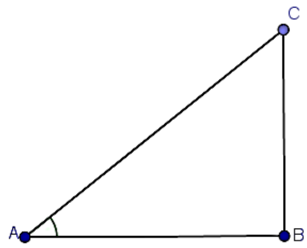



Efetuou as medições e verificou que:

• $\overline{AM}$ = 55 m • $\overline{AB}$ = 15 m • $\overline{FD}$ = 6 m • $\overline{FE}$ = 42 m

Ajuda o Fernando a calcular a largura do rio, $\overline{\text{AD}}$ .

(Conceição & Almeida, 2015, p.45)




1. Utilizando o programa de geometria dinâmica Geogebra, constrói o triângulo rectângulo $[ABC]$. Para tal usa o guião de construção que te apresento **(1º, 2º e 3º passos do guião – Ver Anexo9).**

2. Relativamente ao triângulo construído, como se designam os $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$ ?

3. Utilizando as potencialidades do programa Geogebra, determina:

   **3.1.** O comprimento dos segmentos de reta os $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$. Apresenta esses valores na zona gráfica do programa. Como se designam os comprimentos encontrados relativamente ao triângulo rectângulo? Explica o teu raciocínio.

   **3.2.** Os seguintes quocientes, apresentando os resultados na zona gráfica do programa:

   **3.2.1.** $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ **3.2.2.** $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ **3.2.3.** $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

4. Movimenta o ponto A, obtendo novos triângulos rectângulos.

   **4.1.** Os triângulos obtidos são semelhantes ao inicialmente construído? Explica o teu raciocínio.

   **4.2.** Compara os quocientes obtidos em 3.2 com os quocientes obtidos após a movimentação do ponto A. O que verificas?

   **4.3.** O valor encontrado para cada quociente depende das medidas dos lados dos triângulos considerados? Explica o teu raciocínio.

   **4.4.** O valor encontrado para cada quociente depende das medidas dos ângulos dos triângulos considerados? Explica o teu raciocínio.

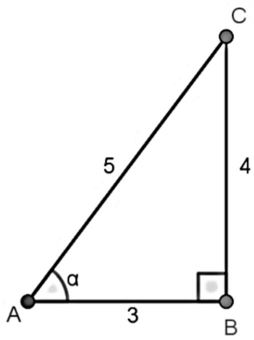
(Adaptado de PI - 9.º ano – 2.º Volume)

Consolidar conhecimentos:

Resolve a Ficha de Trabalho nº1 – As razões trigonométricas (Ver Anexo10)

Como sabes, os valores das razões trigonométricas podem ser obtidos através do quociente entre as medidas dos diferentes lados de um triângulo retângulo. O valor desses quocientes nem sempre é uma dízima finita, o que por vezes nos leva a realizar algumas aproximações.

**1.** Considera o triângulo da figura, retângulo em B. Utilizando a tua calculadora, determina um valor aproximado por defeito, às centésimas, de $sen\alpha$, $cos\alpha$ e $tg\alpha$.




Uma outra forma de obter os valores aproximados das razões trigonométricas é através da utilização das **tabelas trigonométricas**, onde estão registados os valores aproximados das razões trigonométricas de alguns ângulos agudos de amplitude natural.

**2.** Investiga um pouco acerca das tabelas trigonométricas e faz um pequeno relatório onde expliques o seu aparecimento, a sua importância no desenvolvimento da matemática e a razão para, atualmente, terem caído em desuso.

| Ângulo | Sen | Cos | Tg |
|---|---|---|---|
| 1º | 0,0175 | 0,9998 | 0,0175 |
| 2º | 0,0349 | 0,9994 | 0,0349 |
| 3º | 0,0523 | 0,9986 | 0,0524 |
| 4º | 0,0698 | 0,9976 | 0,0699 |
| 5º | 0,0872 | 0,9962 | 0,0875 |
| 6º | 0,1045 | 0,9945 | 0,1051 |
| 7º | 0,1219 | 0,9925 | 0,1228 |
| 8º | 0,1392 | 0,9903 | 0,1405 |
| 9º | 0,1564 | 0,9877 | 0,1584 |
| 10º | 0,1736 | 0,9848 | 0,1763 |

**3.** Na figura está representada parte de uma tabela trigonométrica. Interpreta a tabela e tenta responder às seguintes questões.

**3.1.** Indica um valor aproximado para $tg6^0$.

**3.2.** Indica a amplitude de um ângulo cujo cosseno seja aproximadamente $0{,}9848$.

**4.** Nesta tarefa proponho-te um problema ancestral: a construção de uma tabela trigonométrica de valores naturais. Para isso, vamos utilizar a folha de cálculo.

|  | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | xº | sen x | cos x | tg x |  |
| 2 | 0 |  |  |  |  |
| 3 | 1 |  |  |  |  |
| 4 | 2 |  |  |  |  |
| 5 | 3 |  |  |  |  |
| 6 | 4 |  |  |  |  |
| 7 | 5 |  |  |  |  |
| 8 | 6 |  |  |  |  |
| 9 | 7 |  |  |  |  |
| 10 | 8 |  |  |  |  |
| 11 |  |  |  |  |  |
| 12 |  |  |  |  |  |

A folha de cálculo possui as ferramentas necessárias para determinar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo:

as ferramentas SEN (), COS () e TAN (). Contudo, a folha de cálculo utiliza uma medida para a amplitude dos ângulos que só irás conhecer no ensino secundário: os radianos. Assim, para determinar as razões trigonométricas de ângulos cuja amplitude esteja em graus, temos de converter essas amplitudes para radianos. Para isso, utilizaremos a função RADIANOS.

**4.1.**

1º Constrói uma tabela que, na primeira linha, tenha as razões trigonométricas assinaladas e, na primeira coluna, tenha as medidas das amplitudes dos ângulos de valor inteiro (de $0^0$ a $90^0$), tal como a figura sugere.

2º Na célula B2 escreve a expressão =SEN(RADIANOS(A2)) e arrasta a célula sobre a coluna  a replicar a fórmula anterior para as restantes células da coluna.

3º Repete o procedimento anterior nas células C2 e D2, mas utilizando, respectivamente, as COS e TAN: =COS(RADIANOS(A2)) e =TAN(RADIANOS(A2)).

4º Decora a tabela a teu gosto e imprime-a. Com ela terás uma ajuda na resolução dos exercícios.

**4.2.** Utiliza a tabela trigonométrica que construíste e determina $\alpha, \beta\ e\ \delta$, sabendo que:

$$sen\alpha = 0{,}3090 \quad sen\beta = 0{,}3256 \qquad sen\delta = 0{,}3145.$$

Verifica os resultados obtidos com a calculadora.

(Adaptado de PI - 9.º ano – 2.º Volume)

Consolidar conhecimentos:

Resolve os exercícios da página 51 do manual **(Ver Anexo11)**

## Anexo 6 – Tarefa 3 – O Quadrante e a resolução de problemas

Sabes qual é a altura do edifício da nossa escola? Ou qual é a medida da árvore mais alta do nosso parque da escola?

Em anos anteriores aprendeste a determinar distâncias inacessíveis, recorrendo à semelhança de triângulos. As razões trigonométricas que acabaste de descobrir vão constituir um outro método para determinar essas distâncias.

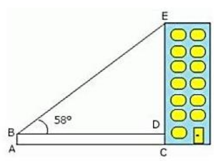
Para resolver este tipo de problemas através das razões trigonométricas, tens de saber a amplitude de um ângulo. Para isso, poderás utilizar o quadrante que te apresento.

### Um pouco de História

Um **quadrante** é um instrumento que permite realizar medições angulares. Estes instrumentos já eram utilizados pelos navegadores portugueses aquando dos Descobrimentos, pois possibilitavam a medição da "altura" dos astros relativamente à linha do horizonte, e assim conhecer a localização do navio. Ao longo do tempo, o quadrante foi alvo de aperfeiçoamentos, entre os quais se destaca o nónio, inventado pelo matemático português Pedro Nunes.

### Determinar distâncias inacessíveis!

1. Depois de escolheres o ponto do edifício que pretendes medir, observa o seu topo através da palhinha. Regista a amplitude do ângulo que o fio marca no quadrante.
2. Determina a distância a que te encontras do objeto no momento da medição.
3. Constrói uma figura como a do exemplo com as tuas medidas.




4. Com o que aprendeste nas aulas anteriores determina a altura do edifício.
5. O que concluís se te afastares do objeto?
6. Repete o procedimento com a árvore mais alta do nosso parque.

**Sugestão:** Constrói uma tabela onde possas registar todas as medições e operações realizadas.

| Objeto | Ângulo de visualização | Altura do observador até aos olhos | Distância do observador até ao objeto | Altura do objeto |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |

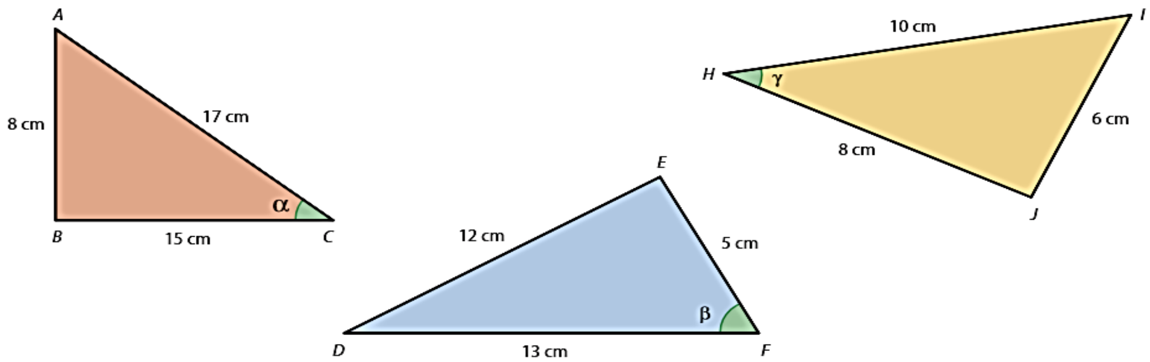
Consolidar conhecimentos:

Resolve os exercícios da página 52 do manual **(Ver Anexo12)**

(Adaptado de PI - 9.º ano – 2.º Volume)

## Anexo 7 – Tarefa 4 – Uma relação Curiosa

Na figura seguinte estão representados três triângulos e os comprimentos dos seus lados.




1. Mostra que os triângulos da figura são retângulos.
2. Determina as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de cada um dos ângulos assinalados na figura. Compara o valor da razão tangente com o quociente entre as razões seno e cosseno de cada ângulo. O que verificas?
3. Para cada ângulo assinalado na figura, determina a soma do quadrado da razão seno com o quadrado da razão cosseno. O que verificas?
4. Investiga agora o valor da expressão seguinte para vários valores de $\alpha$

$$(sen\alpha + cos\alpha)^2 + (sen\alpha - cos\alpha)^2$$

Simplifica o valor da expressão anterior para qualquer valor de $\alpha$ a fim de provares que o resultado observado na investigação é válido qualquer que seja o valor de $\alpha$.

**<u>Sugestão:</u>** Em casa, no programa Geogebra, constrói um triângulo retângulo tal como o que construíste com a ajuda do guião, utilizando o campo de entrada digita:

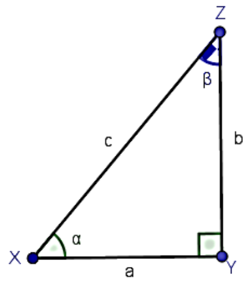
| **Entrada:** (sin($\alpha$)+cos($\alpha$))^2+(sin($\alpha$)-cos($\alpha$))^2 |
|---|

Nota: Faz *print screen* do teu ecran e "cola" a imagem no ficheiro do word. Legenda a tua imagem da seguinte forma: "Fig.1– Questão 4"

Grava o teu ficheiro no ambiente de trabalho com a seguinte extensão: exemplo "tarefa4_sandra+joao" e envia para o meu e-mail.

Comprova as tuas conjeturas!

**5.** Considera agora o triângulo $[XYZ]$.




**5.1.** Utilizando as letras da figura e, tendo em conta que o triângulo é rectângulo, indica a relação existente entre os comprimentos dos seus lados.

**5.2.** Utilizando as letras da figura, compara a razão tangente com o quociente entre as razões seno e cosseno do ângulo $\alpha$ e do ângulo $\beta$ . O que verificas?

**5.3.** Atendendo aos resultados das alíneas anteriores, determina o valor de

$(sen\alpha)^2 + (cos\alpha)^2$ e de $(sen\beta)^2 + (cos\beta)^2$O que verificas?

**5.4.** Que relação existe entre os ângulos de amplitude $\alpha$ e de amplitude $\beta$?

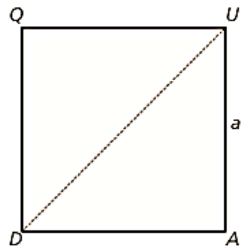
**6.** Relativamente a um ângulo agudo $x$, sabe-se que $senx = \frac{1}{2}$. Determina o valor exato de $cosx$ e $tgx$. Explica o teu raciocínio.

Consolidar conhecimentos:

Resolve os exercícios da página 56 do manual **(Ver Anexo13)**

(Adaptado de PI - 9.º ano – 2.º Volume)

**Anexo 8 – Tarefa 5 – As Razões trigonométricas dos ângulos de $30^0, 45^0$ e $60^0$**

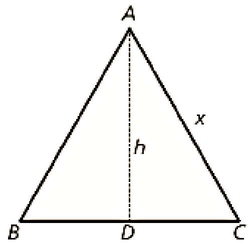



**1.** Na figura, $[DU]$ é uma diagonal do quadrado de lado $a$.

**1.1.** Qual é a medida da amplitude do ângulo UDA? Justifica.

**1.2.** Calcula, a partir do quadrado de lado $a$, os valores de $sen45^0, \cos 45^0$ $e$ $tg45^0$.

**2.** Considera o seguinte triângulo equilátero $[ABC]$ de lado $x$ no qual foi traçada uma das suas alturas.




**2.1.** Escreve o comprimento da altura, $\boldsymbol{h}$, do triângulo em função de $\boldsymbol{x}$.

**2.2.** Qual é a medida da amplitude do ângulo interno ABC do triângulo? Justifica.

**2.3.** Qual é a medida da amplitude do ângulo BAD? Justifica.

**2.4.** Calcula, a partir do triângulo $[ADC]$, os valores exatos de $sen60^0, \cos 60^0$ $e$ $tg60^0$.

**2.5.** Calcula, a partir do triângulo $[ADC]$, os valores exatos de $sen30^0, \cos 30^0$ $e$ $tg30^0$.

(Conceição & Almeida, 2015, p.57)

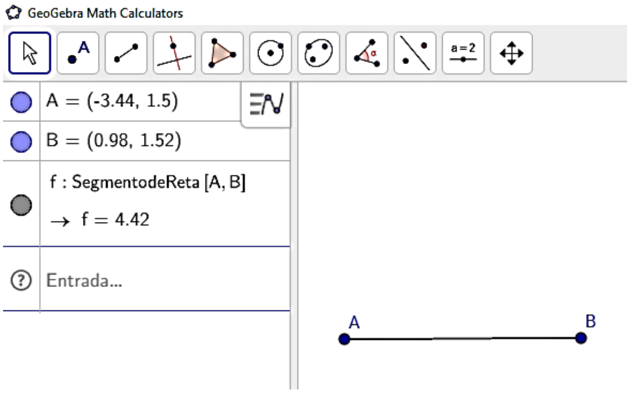
Consolidar conhecimentos:

Resolve os exercícios **5.**, **6.** e **7.** da página 60 do manual **(Ver Anexo14)**

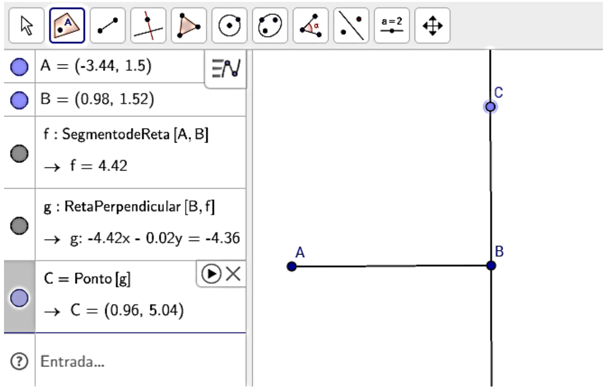
Com recurso ao Geogebra, vamos construir um triângulo retângulo de lados e ângulos agudos variáveis, de modo a constatar graficamente as propriedades dos triângulos rectângulos no que concerne às suas razões trigonométricas.

Segue o seguinte tutorial.

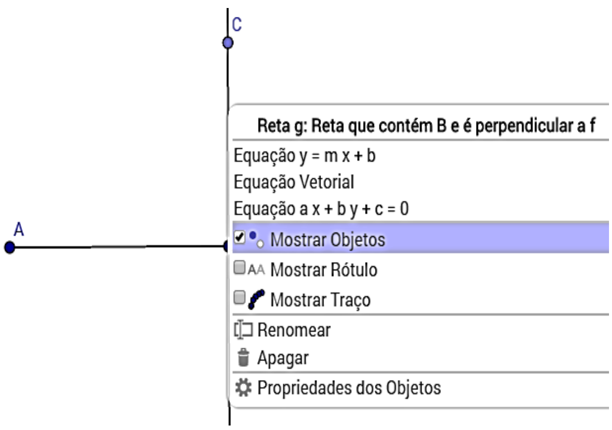
1º Desenha $[AB]$;

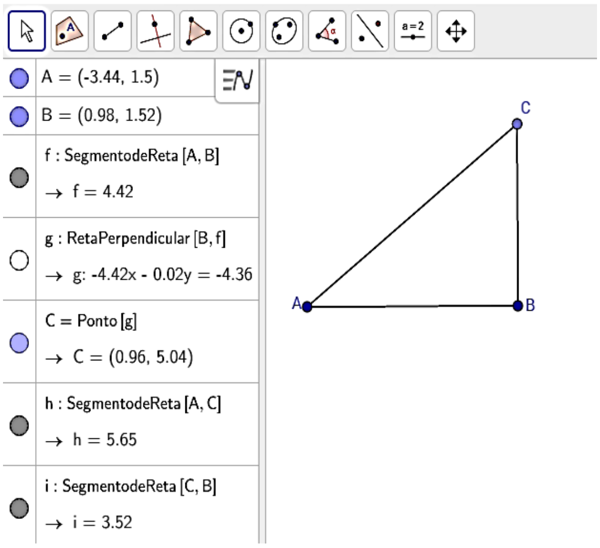



2º A partir do ponto B constrói-se uma reta perpendicular a $[AB]$;

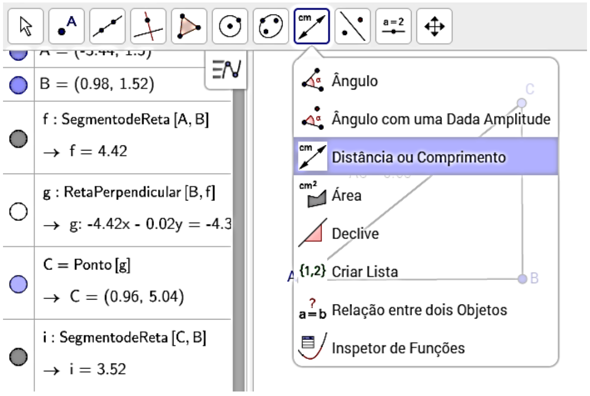


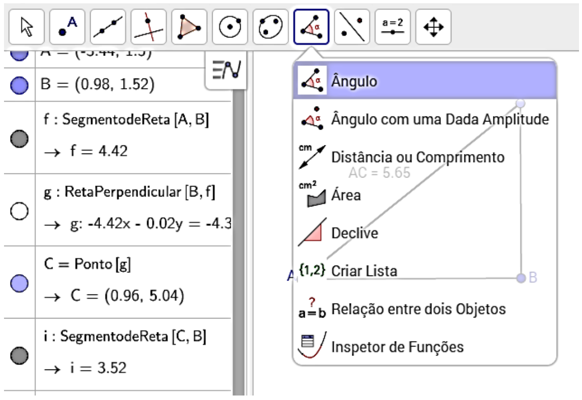

3º Esconde-se a reta e constroem-se os segmentos de reta $[BC]$ e $[CA]$;

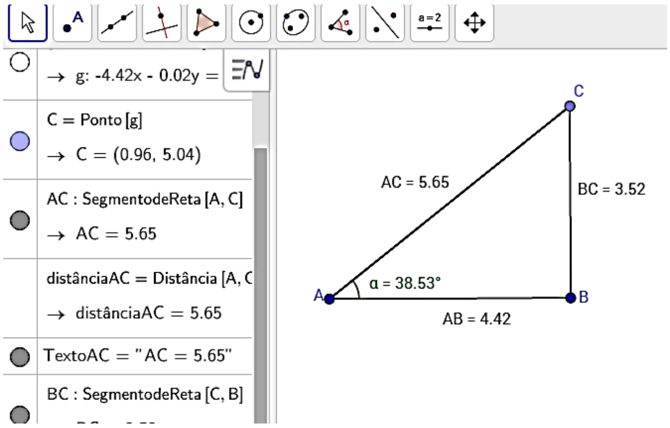


4º Exibe as medidas dos comprimentos dos lados do triângulo rectângulo e a amplitude do ângulo BAC;



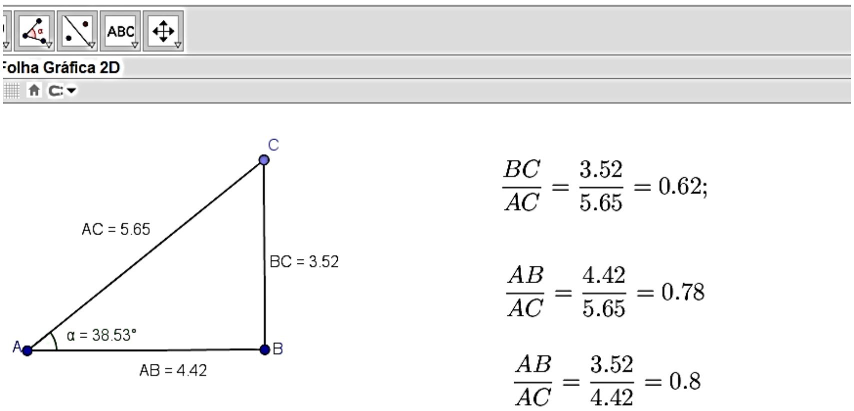




5º Para visualizar os valores das razões trigonométricas, usando fórmulas Latex, insere-se, sucessivamente, os seguintes textos:

\frac{BC}{AC}=\frac{BC}{AC}=

\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{AC}=

\frac{BC}{AB}=\frac{BC}{AB}=

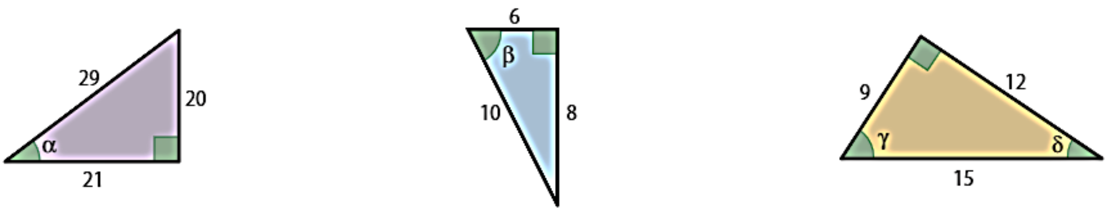



Agora, move o ponto C e responde às questões da **Tarefa 2.**

**Anexo 10 – Para consolidar – Ficha de Trabalho**

**Ficha de Trabalho nº1 – As razões trigonométricas**

**1.** Na figura estão representados três triângulos retângulos.

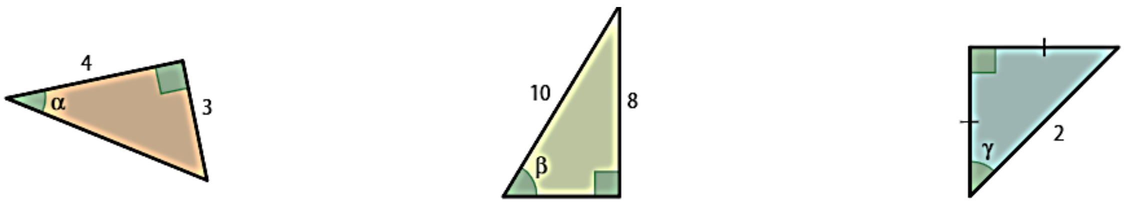



Atendendo aos dados das figuras, determina os valores de:

**1.1.** $sen\alpha, cos\alpha \ e \ tg\alpha$ **1.2.** $sen\beta, cos\beta \ e \ tg\beta$

**1.3.** $sen\delta, cos\delta \ e \ tg\delta$ **1.4.** $sen\gamma, cos\gamma \ e \ tg\gamma$

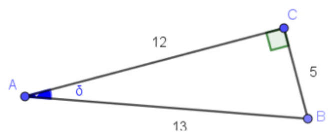
**2.** Observa as figuras.




Atendendo às medidas indicadas, determina os valores de:

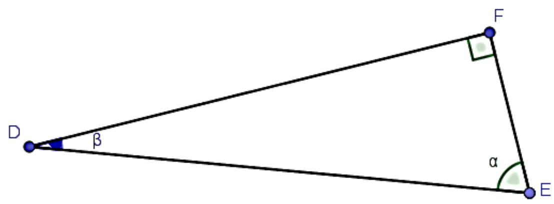
**2.1.** $sen\alpha, cos\alpha \ e \ tg\alpha$ **2.2.** $sen\beta, cos\beta \ e \ tg\beta$ **2.3.** $sen\gamma, cos\gamma \ e \ tg\gamma$

**3.** Na figura estão representados os triângulos $[ABC] \ e \ [DEF]$.




Sabe-se que:

- $D\hat{F}E = A\hat{C}B$
- $E\hat{D}F = B\hat{A}C$




**3.1.** Mostra que os triângulos são semelhantes.

**3.2.** Atendendo aos dados da figura, determina:

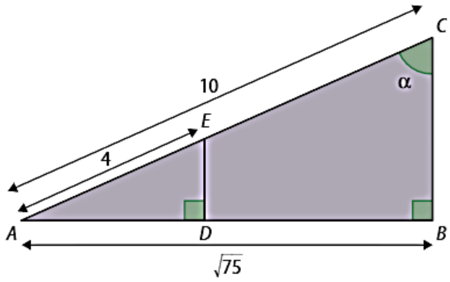
**3.2.1.** $sen\beta, cos\beta \ e \ tg\beta$

**3.2.2.** $sen\alpha, cos\alpha \ e \ tg\alpha$

**3.3.** O triângulo $[IJK]$ resultou da ampliação de razão $3 \times 10^7$ do triângulo $[ABC]$. Determina as razões trigonométricas do ângulo de menor amplitude do triângulo $[IJK]$.

Explica o teu raciocínio.

**4.** Observa a figura. Sabe-se que:




- $\overline{AE} = 4$;
- $\overline{AC} = 10$;
- $\overline{AB} = \sqrt{75}$.

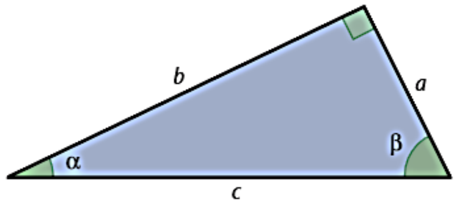
**4.1.** Mostra que os triângulos $[ABC]$ e $[AED]$ são semelhantes.

**4.2.** Determina o valor de $cos\alpha$.

**4.3.** Determina, por dois processos distintos, o comprimento do segmento de reta ED.

**4.4.** Determina a área do triângulo $[AED]$.

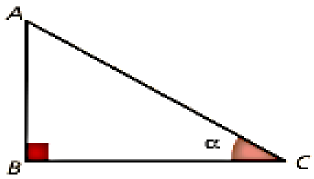
**5.** Na figura está representado um triângulo retângulo, em que $a, b$ $e$ $c$ designam, respectivamente, as medidas dos catetos e da hipotenusa.




Prova que o valor de $cos\alpha \times sen\beta + sen\alpha \times cos\beta = 1$

(Adaptado de PI - 9.º ano – 2.º Volume)

**1** **Considera o triângulo retângulo [*ABC*].**




Qual das seguintes opções representa o cateto oposto, o cateto adjacente e a hipotenusa do triângulo [*ABC*] relativamente ao ângulo $\alpha$?

**(A)** [*AB*] é o cateto adjacente, [*BC*] é o cateto oposto e [*AC*] é a hipotenusa.

**(B)** [*AB*] é a hipotenusa, [*BC*] é o cateto adjacente e [*AC*] é o cateto oposto.

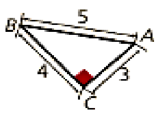
**(C)** [*AB*] é o cateto oposto, [*BC*] é o cateto adjacente e [*AC*] é a hipotenusa.

**(D)** [*AB*] é o cateto oposto, [*BC*] é a hipotenusa e [*AC*] é o cateto adjacente.

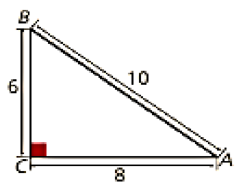
Adaptado de *Banco de itens*, GAVE

**2** **Calcula o valor de sen $\hat{A}$, cos $\hat{A}$ e tg $\hat{A}$, em cada um dos triângulos retângulos.**

**a)**



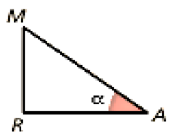

**b)**




**3** **Copia e completa.**

**a)** $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\square}{\overline{MA}}$

**b)** $\square = \overline{MA}\ \text{sen}\,\alpha$




**4** **Recorrendo à calculadora ou a uma tabela, indica o valor, arredondado às milésimas, das seguintes razões trigonométricas.**

**a)** sen 37° **b)** cos 72°

**c)** tg 12° **d)** tg 45°

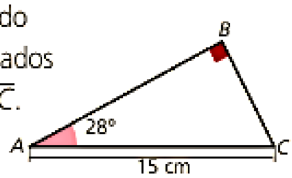
**5** **Recorrendo à calculadora ou a uma tabela, indica a medida da amplitude, arredondada às unidades, de cada ângulo, sabendo que:**

**a)** $\text{sen}\,\alpha = 0{,}5150$ **b)** $\cos\beta = 0{,}8387$

**c)** $\text{tg}\,\lambda = 0{,}8693$ **d)** $\text{sen}\,\theta = 0{,}5$

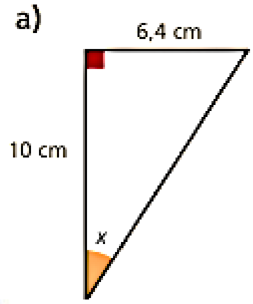
**6** **Considera um triângulo retângulo [*ABC*] em que $B\hat{A}C = 28°$ e $\overline{AC} = 15$ cm.**

Determina, usando valores arredondados às centésimas, $\overline{BC}$.

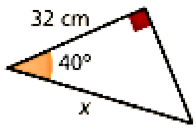



**7** **Calcula o valor de *x*, arredondado às centésimas, em cada um dos triângulos desenhados.**

**a)**



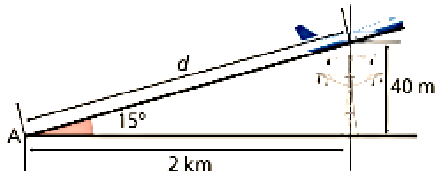

**b)**



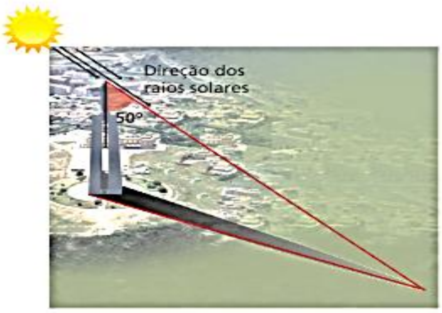

**8** **Uma rampa com 1,6 metros de comprimento faz um ângulo de amplitude $\alpha$ com o plano do chão. Sabendo que a altura a que o cão se encontra é de 0,8 m, qual é o valor de $\alpha$? Explica a tua resposta.**

(Conceição & Almeida, 2015, p.51)

**9** Um avião descola da pista no ponto *A* e sobe fazendo um ângulo constante de 15° com o plano do chão. Na direção do percurso do avião, a 2 km do aeroporto, existe uma torre retransmissora de televisão com 40 metros de altura. Será que é necessário o avião desviar-se da rota para não embater nessa torre? Explica a tua resposta. A figura não está desenhada à escala.




**10** **O monumento do Cristo Rei foi inaugurado a 17 de maio de 1959. É composto por um pedestal, com 82 m de altura, e pela estátua, com 28 m de altura.**

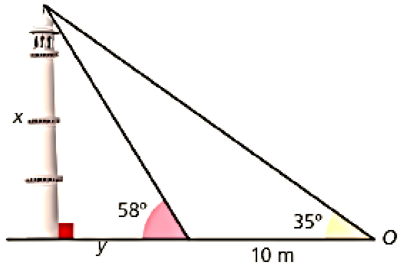



**a)** No momento em que o sol incide na estátua, fazendo com ela um ângulo de 50°, quanto mede o comprimento da sombra do monumento?

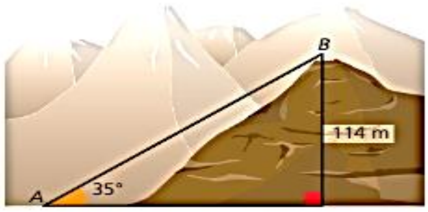
**b)** Há momentos do dia em que a sombra de um objeto é igual à sua altura. Qual é a amplitude do ângulo que os raios solares fazem com a estátua nos momentos referidos? Justifica a tua resposta.

Adaptado do *Projeto 1001 itens*, GAVE

**11** De um ponto *O* vê-se o topo de uma torre sob um ângulo de 35°. Avançando 10 metros em direção à torre, o ângulo passa a ser de 58°. Determina a altura da torre arredondada às décimas.




**12** **O topo *B* da montanha está a 114 m de altitude. Para instalar um teleférico, foi medida a amplitude do ângulo em *A* e o desnível entre os pontos *A* e *B*.**




**a)** Qual é a distância, arredondada às centésimas, entre os pontos *A* e *B* da montanha? Explica a tua resposta.

**b)** Devido ao peso do teleférico o seu cabo de aço é curvo. Essa curvatura torna o comprimento do cabo 2% maior do que a distância entre os pontos de partida, *A*, e de chegada, *B*, do teleférico. Qual é o comprimento do cabo? Explica como chegaste à tua resposta.


(Conceição & Almeida, 2015, p.52)

**1** **Sem calcular o valor de $\alpha$, determina $\cos \alpha$ e $\text{tg}\,\alpha$, sabendo que $\text{sen}\,\alpha = 0{,}36$ e $\alpha$ é um ângulo agudo. Apresenta os valores arredondados às centésimas.**

**2** **Sabendo que $\alpha$ designa a amplitude, em graus, de um ângulo agudo e que $\text{sen}\,\alpha = \frac{8}{9}$, qual dos seguintes é o valor exato do $\cos \alpha$?**

**(A)** $\frac{\sqrt{17}}{9}$ **(B)** $\frac{\sqrt{17}}{81}$

**(C)** $\frac{1}{9}$ **(D)** $\frac{17}{81}$

**3** **Sem recorrer à calculadora e sem efetuar cálculos, indica, justificando:**

**a)** o valor de $\text{sen}\,30°$, sabendo que $\cos 60° = 0{,}5$.

**b)** o valor de $\cos 25°$, sabendo que $\text{sen}\,65° \simeq 0{,}9063$.

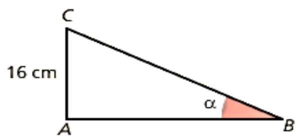
**4** **Verifica, justificando, se existe pelo menos um ângulo agudo $\alpha$ para o qual:**

**a)** $\text{sen}\,\alpha = 1{,}4$

**b)** $\text{sen}\,\alpha = 0{,}6$ e $\text{tg}\,\alpha = 0{,}75$

**c)** $\cos \alpha = -1$

**5** **Observa o seguinte triângulo [*ABC*] retângulo em *A*.**




Sabendo que $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, calcula:

**a)** Os valores exatos de $\text{sen}\,\alpha$ e $\text{tg}\,\alpha$.

**b)** o comprimento da hipotenusa do triângulo [*ABC*].

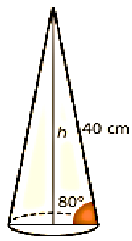
**6** **Sendo $\alpha$ um ângulo agudo, mostra que $(\text{sen}\,\alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2\,\text{sen}\,\alpha \cos \alpha$.**

**7** **Considera, num referencial cartesiano, os pontos $A(2, 1)$, $B(-1, 1)$ e $C(-1, -3)$.**

**a)** Representa os pontos *A*, *B* e *C*, num referencial cartesiano ortogonal e monométrico.

**b)** Calcula o seno do ângulo *BAC*.

**8** **A geratriz do cone reto da figura mede 40 cm e faz um ângulo de 80° com o diâmetro da base. Em cada alínea, apresenta os valores arredondados às décimas.**

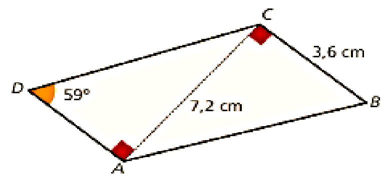



**a)** Calcula a altura do cone.

**b)** Determina o volume do cone.

**c)** Qual é a área da superfície deste cone?

**9** **O quadrilátero [*ABCD*] está dividido em dois triângulos retângulos.**

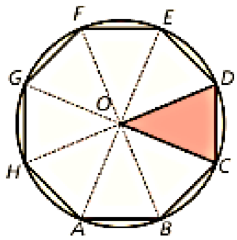



**a)** Qual é a medida da amplitude do ângulo *BAC*, arredondado às unidades? Explica como chegaste à tua resposta.

**b)** Determina $\overline{AD}$ arredondado às décimas.

(Conceição & Almeida, 2015, p.56)

**5** **Considera um octógono regular inscrito numa circunferência de centro $O$ e raio 4 cm e decomposto em oito triângulos de vértice $O$ e com um lado comum ao octógono.**

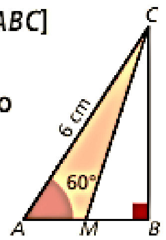



**a)** Justifica que os triângulos nos quais está dividido o octógono são iguais e que $C\hat{O}D = 45°$.

**b)** Determina o valor exato das áreas do triângulo $[OCD]$ e do octógono.

*Caderno de Apoio às Metas Curriculares*, 3.º Ciclo

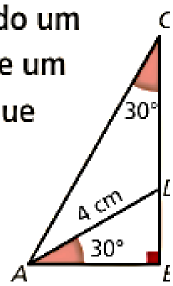
**6** **Considera um triângulo $[ABC]$ retângulo em $B$ e o ponto médio $M$ de $[AB]$. Sabendo que $B\hat{A}C = 60°$ e que $\overline{AC} = 6$ cm, determina o valor exato da área do triângulo $[AMC]$.**




*Caderno de Apoio às Metas Curriculares*, 3.º Ciclo

**7** **Na figura está representado um triângulo retângulo em $B$ e um ponto $D$ no lado $[BC]$ tal que $B\hat{A}D = B\hat{C}A = 30°$.**

Sabendo que $\overline{AD} = 4$ cm, determina o valor exato do perímetro do triângulo $[ABC]$.




*Caderno de Apoio às Metas Curriculares*, 3.º Cicl

(Conceição & Almeida, 2015, p.60)

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS SÁ DA BANDEIRA - 170562
ESCOLA DO ENSINO BÁSICO 2 E 3 D. JOÃO II - SANTARÉM - 340790
Rua Cidade D' Agen, Jardim de Baixo, 2005-503 Santarém
Tel. 243.307120 - Fax. 243.307125 - *e-mail*: geral@agrupamentosabandeira.pt - Web: http://www.agrupamentodjoao2.pt

# Ficha de Avaliação nº5 de Matemática – 9º Ano

Nome:_________________________________ Nº ___ Turma: ___ Data: __ /__ /__

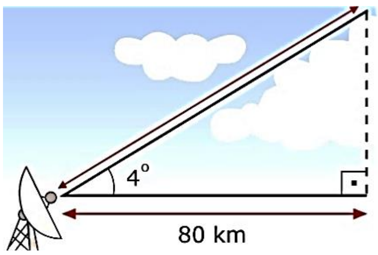
***Importante:*** O teste é constituído por dois cadernos (Caderno 1 e Caderno 2).
Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.
Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta.
Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

***Bom trabalho!***

## CADERNO 1: 30 minutos

**(É permitido o uso de calculadora.)**

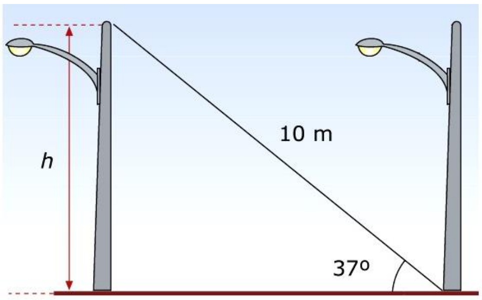
**1.** Qual o alcance máximo da antena, em km, aproximado às décimas?




**2.** Na estrada foram colocados postes elétricos consecutivos como mostra a figura.

**Nas tuas respostas**, apresenta o resultado aproximado às centésimas.

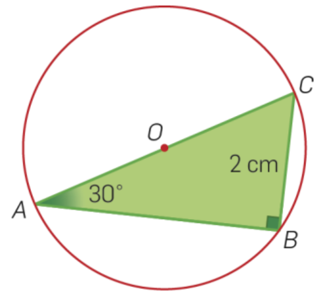
Se efetuares arredondamentos nos cálculos intermédios conserva, no mínimo, 3 casas decimais.




**2.1.** Qual a altura, em m, do poste elétrico?

**2.2.** Qual a distância, em m, entre dois postes consecutivos?

**3.** Na figura ao lado está representado um triângulo retângulo inscrito numa circunferência de diâmetro $[AC]$.



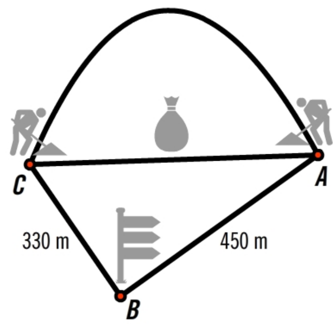

Tal como a figura sugere:

- $B\hat{A}C = 30°$ ;
- $\overline{CB} = 2 \text{ cm}$ .

Determina o perímetro da circunferência.

Apresenta o valor pedido em centímetros, arredondado às décimas.

**4.** Sabe-se da existência de um depósito de minério no interior de uma montanha. O trabalho mineiro pode ser facilitado se a construção do túnel começar a ser feita simultaneamente dos dois lados da montanha. Para isso, é necessário determinar com exatidão a direção segundo a qual se deve escavar, isto é, o ângulo segundo o qual se deve escavar o túnel, quando se toma para referência um ponto exterior.
O ângulo em B é reto.



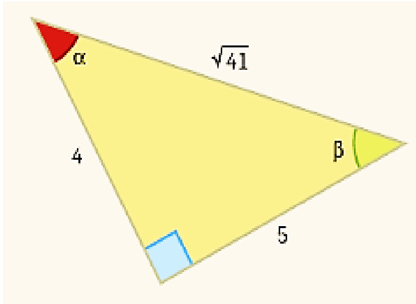

**4.1.** Determina, com aproximação às décimas, a amplitude do ângulo em C.

**4.2.** Determina, com aproximação às unidades, a distância de A a C.

| Questão | 1 | 2.1 | 2.2 | 3 | 4.1 | 4.2 | Total (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação | 8 | 8 | 8 | 9 | 8 | 8 | 49 |

**CADERNO 2: 30 minutos**

**(Não é permitido o uso de calculadora.)**




**5.** $\alpha$ e $\beta$ são amplitudes de ângulos agudos.

Qual das seguintes relações é verdadeira?

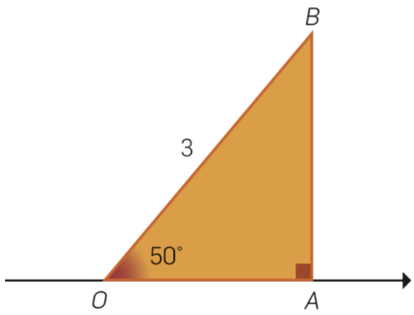
**(A)** $sen\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$ **e** $\cos\beta = \frac{4}{\sqrt{41}}$ **(B)** $sen\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$ **e** $tg\ \beta = \frac{4}{5}$

**(C)** $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$ **e** $tg\ \beta = \frac{4}{5}$ **(D)** $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$ **e** $sen\beta = \frac{5}{\sqrt{41}}$

**6.** Na figura ao lado estão representados parte da reta real e o triângulo retângulo $[OAB]$.

Sabe-se que:

- o ponto $O$ é a origem;
- o triângulo $[OAB]$ é o triângulo retângulo cujo cateto $[OA]$ está contido na reta real;
- a amplitude do ângulo $AOB$ é $50^\circ$.




Qual das seguintes é a abcissa do ponto $A$?

**(A)** $3\cos\ (50^\circ)$ **(B)** $3\,\text{sen}\ (50^\circ)$ **(C)** $\frac{3}{\text{sen}\ (50^\circ)}$ **(D)** $\frac{3}{\cos\ (50^\circ)}$

**7.** Calcula o valor exato da expressão seguinte.

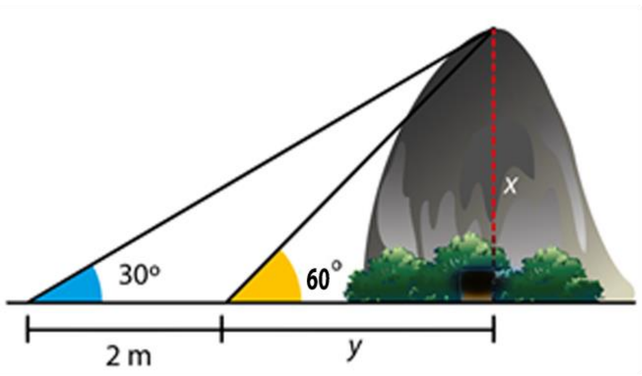
$$3\,(cos\ 30^\circ)^2\ +\ 2\,(sen\ 30^\circ)^2 - 3\ tg\ 45^\circ$$

Apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar.

**8.** Justifica **se** existe um ângulo $\alpha$ de modo que $sen\alpha = \frac{3}{4}$ e $cosa = \frac{1}{4}$

**9.** O João vê o topo de um rochedo sob um ângulo de 60°.

Ao afastar-se do rochedo mais 2 m, passou a vê-lo sob um ângulo de 30°, como está representado na Figura.




Determina a **altura exata** do rochedo, em metros.

Mostra como chegaste à tua resposta. **A imagem não está construída à escala.**

**10.** Classifica as seguintes igualdades de Verdadeira (**V**) ou Falsa (**F**)

| | | |
|---|---|---|
| V | F | $sen^2(45^0) = 1 - cos^2(45^0)$ |
| V | F | $sen^2(45^0) + cos^2(60^0) = 1$ |
| V | F | $tg30^0 = \dfrac{cos30^0}{sen30^0}$ |
| V | F | $sen30^0 = cos60^0$ |

**11.** Simplificando a expressão $(sen \propto + cos \propto)^2 + (sen \propto - cos \propto)^2$, obtemos:

**(A)** 2

**(B)** $sen^2 \propto - cos^2 \propto$

**(C)** 1

**(D)** 0

*Confia nas tuas capacidades! Sandra Leitão*

| Questão | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | Total (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação | 6 | 6 | 8 | 8 | 9 | 8 | 6 | 51 |

*"Quanto maiores são as dificuldades a vencer, maior será a satisfação."* Cícero

**Anexo 16 – Orientações curriculares**

O Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico salienta que no 3.º ciclo onde esta unidade se enquadra, requerem-se os sete desempenhos seguintes, com o significado que se particulariza:

(1) Identificar/designar: O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente.

(2) Reconhecer: O aluno deve apresentar uma argumentação coerente ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação.

(3) Reconhecer, dado…: O aluno deve justificar o enunciado em casos concretos, sem que se exija que o prove com toda a generalidade.

(4) Saber: O aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.

(5) Provar/Demonstrar: O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.

(6) Estender: Este verbo é utilizado em duas situações distintas: (a) Para estender a um conjunto mais vasto uma definição já conhecida. O aluno deve definir o conceito como se indica, ou de forma equivalente, reconhecendo que se trata de uma generalização. (b) Para estender uma propriedade a um universo mais alargado. O aluno deve reconhecer a propriedade, podendo por vezes esse reconhecimento ser restrito a casos concretos.

(7) Justificar: O aluno deve justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida. No seu conjunto, e de modo integrado, estes desempenhos devem concorrer, a partir do nível mais elementar de escolaridade, para a aquisição de conhecimentos de factos e de procedimentos, para a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático, para uma comunicação (oral e escrita) adequada à Matemática, para a resolução de problemas em diversos contextos e para uma visão da Matemática como um todo articulado e coerente.